量子光学基础

杨伯君　编著

北京邮电大学出版社



53.715
660

量子光学基础

杨伯君　编著



北京邮电大学出版社

9720051

图书在版编目(CIP)数据

量子光学基础/杨伯君著. —北京：北京邮电大学出版社，1996.5

ISBN 7-5635-0249-1

Ⅰ. 量… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 量子光学 Ⅳ. O431

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 09819 号

量子光学基础

作　　者　杨伯君

责任编辑　王守平

*

北京邮电大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

河北省高碑店市印刷厂印刷

*

850×1168 毫米　1/32　印张 7.625　字数 196 千字

1996 年 11 月第一版　1996 年 11 月第一次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7-5635-0249-1/O・14　定价：10.00 元

内容简介

本书侧重介绍量子光学的基本理论基础以及与通信密切相关的前沿课题。内容包括：量子力学的基础知识、激光的半经典理论、电磁场的量子化及量子化电磁场的基本性质、量子光学的热库理论、光学压缩态和光孤子传输的量子理论。本书可作为通信、光电子和信息等专业研究生的教材或教学参考书，也可供有关研究人员参考。

前　言

虽然历史上对光本质的认识有过微粒说和波动说之争，但当时的认识都是经典的。1900 年，普朗克（Planck）为了解释热辐射的频谱分布，最早提出了光的量子性。光子概念的引入是在 1905 年，爱因斯坦（Einstein）为了解释光电效应而提出的。1917 年爱因斯坦又利用光子概念唯象地解释了光从原子中的吸收与辐射。光的量子性引出，为量子力学的建立和发展起了重要作用。

除早期光学与量子论的一些联系外，在以后相当长的一段时间内物理光学和量子力学各自独立发展。大量物理光学实验均基于麦克斯韦（Maxwell）方程的电磁理论来解释。在 1909 年泰勒（Taylor）曾研究了光干涉实验中的量子效应，他在双缝干涉实验中采用很弱的光束经过长时间照射，企图以单个光子打在双缝上，发现它与较强光束短时间观测结果没有什么不同。这表明一次相干实验显示不出经典电磁理论的振幅相干，这与基于量子力学的几率幅相干不同。

要显示出干涉实验中的量子效应，不能采用简单的振幅相干而应采用强度相干，即二次相干，它与光场的二阶相关函数有关，这方面最早的实验是 1956 年由 Hanbury-Brown 和 Twiss 进行的，称之谓 HBT 实验。光在传输中量子效应的突出表现是光的反聚束效应，它是 1963 年首先由 Glauber 从理论上预言，从经典理论解释反聚束现象，要求负的几率。第一次反聚束的实验观测是在 1976 年，在原子共振荧光中观测到反聚束效应。反聚束光对应光子数统计为亚泊松（Poisson）分布。另一个重要的量子光学独有的性质是光的压缩态，光的压缩态具有低于真空态的噪声，由此广

泛引起人们重视，1976 年首先从理论上预言，1985 年 Slushev 等人首先利用四波混频观测到光的压缩态，同年人们还观测到另一个重要的非经典效应，即光的崩坍与再生效应，它是光场量子化的结果。

本书是作者在北京邮电大学为研究生讲授量子光学课程基础上编写而成的，考虑到工科院校学生量子力学基础较弱，因此在第一章简要地介绍了一些必要的量子力学知识；第二章介绍激光的半经典理论；第三章讲述电磁场的量子化；第四章介绍量子光学的热库理论；最后两章介绍量子光学研究中的两个前沿课题：光学压缩态和光孤子。要从量子力学的基本概念出发写到量子光学当前发展的某些前沿，无疑跨度是很大的，加上学时数的限制，可想编写的难度是比较大的，因此，作者在有些地方不得不采用单刀直入的办法，这样在一些新概念的引入时可能会给读者一种比较突然的感觉，但通过作者的教学实践感到读者一般是可以接受的，当然对有些内容只要求掌握一个思路，完全的掌握有赖于读者进一步研究。总之作者希望在这本篇幅不太大的书中，能给读者较广泛的知识，以使读者能较快地深入到量子光学的前沿，开展研究工作。

由于作者水平限制，不一定能达到预期的目的。另外对书中的错误和不足之处欢迎读者批评指正。

清华大学刘师群、赵钧教授和北京邮电大学徐大雄教授对本书初稿提出过宝贵意见，在此向他们表示衷心的感谢。

作　者

1996 年 5 月

目　　录

第一章　量子力学的基础知识

§1-1　量子力学的基本概念 …………………………… (1)
1. 量子力学的基本原则 …………………………… (1)
2. 量子力学中的表象 …………………………… (12)
3. Dirac 符号 …………………………… (14)
4. 量子力学中的绘景 …………………………… (15)
5. 简单谐振子 …………………………… (17)
6. 测不准关系 …………………………… (20)
§1-2　量子跃迁 …………………………… (22)
1. 跃迁与跃迁几率 …………………………… (22)
2. 与时间无关的微扰 …………………………… (23)
3. 频率为 ω 的谐振微扰 …………………………… (25)
4. 二能级原子模型 …………………………… (26)
§1-3　密度矩阵 …………………………… (29)
1. 衰减二能级系统 …………………………… (29)
2. 二能级原子的密度矩阵 …………………………… (31)
3. 密度矩阵的动力学方程 …………………………… (33)
4. 密度矩阵的矢量模型 …………………………… (35)
习　题 …………………………… (39)
参考文献 …………………………… (42)

第二章　激光的半经典理论

§2-1　激光理论概况 …………………………………… (43)
§2-2　激光的自洽场方程 ………………………………… (46)
　1. 介质中的场方程 …………………………………… (46)
　2. 兰姆自洽场方程 …………………………………… (48)
§2-3　固体激光器的兰姆理论 …………………………… (50)
　1. 宏观电极化强度与密度矩阵的关系 ……………… (50)
　2. 布居数矩阵的动力学方程 ………………………… (51)
　3. 布居数矩阵方程的近似解 ………………………… (52)
　4. 激光的增益饱和效应 ……………………………… (54)
§2-4　气体激光器 ………………………………………… (55)
　1. 非均匀加宽与兰姆凹陷 …………………………… (55)
　2. 兰姆的半经典理论 ………………………………… (57)
　3. 兰姆凹陷的理论解释 ……………………………… (59)
§2-5　半导体激光器理论 ………………………………… (60)
　1. 半导体增益介质的极化强度 ……………………… (60)
　2. 单模半导体激光器理论 …………………………… (63)
　3. 激光增益的数值计算 ……………………………… (65)
习　题 ……………………………………………………… (67)
参考文献 …………………………………………………… (69)

第三章　电磁场的量子化

§3-1　电磁场的量子化 …………………………………… (70)
　1. 电磁场的正则量子化 ……………………………… (71)
　2. 光子数态 …………………………………………… (73)
　3. 光子的位相算符 …………………………………… (74)
§3-2　相干态与电磁场的相干性质 ……………………… (77)

1. 相干态…………………………………………………… (77)
2. 场的相关函数………………………………………… (79)
3. 光子相关测量………………………………………… (82)
4. 量子力学光子计数分布……………………………… (83)
§3-3 电磁场的表示………………………………………… (84)
1. 数态展开……………………………………………… (85)
2. P表示 ………………………………………………… (86)
3. 维格纳(Wigner)表示 ……………………………… (88)
4. Q表示 ………………………………………………… (90)
5. 广义的P表示 ………………………………………… (91)
§3-4 原子与辐射场的相互作用…………………………… (93)
1. 电子波场的量子化…………………………………… (93)
2. 辐射场与电子场间的相互作用……………………… (95)
3. 量子崩坍与再生现象 ……………………………… (100)
4. 二能级原子的自发辐射 …………………………… (101)
§3-5 量子噪声 …………………………………………… (104)
1. 热噪声 ……………………………………………… (104)
2. 量子噪声 …………………………………………… (106)
3. 量子计数器的信噪比 ……………………………… (107)
4. 光放大器的噪声 …………………………………… (110)
5. 光子统计 …………………………………………… (111)
习 题…………………………………………………… (113)
参考文献…………………………………………………… (115)

第四章 量子光学的热库理论

§4-1 密度算符的主方程 ………………………………… (116)
§4-2 福克-普朗克方程 …………………………………… (121)
1. P表示 ……………………………………………… (121)

2. 福克-普朗克方程的性质 …………………………… (124)
3. Q 表示 …………………………………………… (126)
4. 维格纳表示 ………………………………………… (128)
5. 复 P 表示 ………………………………………… (129)
§4-3 朗之万方程 ………………………………………… (131)
1. 布朗运动的朗之万方程 …………………………… (131)
2. 阻尼谐振子的朗之万方程 ………………………… (132)
3. 一般系统的朗之万方程 …………………………… (136)
习 题……………………………………………………… (139)
参考文献…………………………………………………… (140)

第五章 光学压缩态

§5-1 光学压缩态的定义与性质 ……………………… (141)
1. 光学压缩态的定义 ………………………………… (141)
2. 双光子相干态 ……………………………………… (143)
3. 光学压缩态的一般性质 …………………………… (145)
4. 压缩光的表示 ……………………………………… (148)
§5-2 光学压缩态的检测 ……………………………… (149)
1. 寻常零差探测器 …………………………………… (150)
2. 平衡零差探测器 …………………………………… (152)
3. 平衡零差探测器的使用 …………………………… (154)
§5-3 利用参数振荡产生光学压缩态 ………………… (156)
1. 参数振荡器的含意 ………………………………… (156)
2. 参数振荡产生压缩光的理论 ……………………… (157)
3. 压缩谱 ……………………………………………… (159)
4. 参数振荡器产生压缩光实验 ……………………… (161)
§5-4 四波混频产生光学压缩态 ……………………… (162)
1. 四波混频的意义 …………………………………… (162)

2. 四波混频的全量子理论 …………………………… (165)
3. 四波混频压缩实验 …………………………… (169)
§ 5-5 光学压缩态的可能应用 …………………………… (171)
1. 低噪声光通信 …………………………… (171)
2. 引力波的探测 …………………………… (174)
§ 5-6 振幅压缩态 …………………………… (177)
1. 振幅压缩态的意义 …………………………… (177)
2. 振幅压缩态的产生 …………………………… (178)
习 题…………………………… (182)
参考文献…………………………… (183)

第六章 光孤子传输的量子理论

§ 6-1 光孤子通信的评述 …………………………… (184)
1. 光孤子的基本概念 …………………………… (184)
2. 光孤子的产生与光孤子源 …………………………… (186)
3. 光孤子传输的稳定性 …………………………… (189)
4. 光孤子放大与 Gordon-Haus 极限 …………………………… (190)
5. 光孤子通信系统 …………………………… (192)
§ 6-2 光孤子传输的经典理论 …………………………… (194)
1. 光纤中光波包络方程的推导 …………………………… (194)
2. 非线性薛定谔方程的孤子解 …………………………… (202)
3. 光纤中包络孤子传输的某些问题 …………………………… (206)
§ 6-3 量子非线性薛定谔方程 …………………………… (209)
1. 非线性薛定谔方程的量子化 …………………………… (209)
2. 与时间有关的 Hartree 近似 …………………………… (212)
3. 崩坍与再生效应 …………………………… (214)
§ 6-4 光孤子传输的量子场理论 …………………………… (217)
1. 量子孤子的主方程 …………………………… (217)

2. 量子孤子包络的准经典方程 …………………………… (219)
3. 量子准经典非线性薛定谔方程的应用 …………… (221)
§6-5 光孤子压缩态 ………………………………………… (224)
1. 压缩态产生的原理 ………………………………… (224)
2. 压缩谱的探测 ……………………………………… (227)
3. 光纤中压缩光的观测 ……………………………… (227)
习 题………………………………………………………… (229)
参考文献……………………………………………………… (230)

第一章　量子力学的基础知识

本章将简单介绍与量子光学密切相关的量子力学的基本知识，包括量子力学的基本概念、量子跃迁和密度矩阵等。

§1-1　量子力学的基本概念

1. 量子力学的基本原则

量子力学是处理物质微观现象的基本理论，整个理论系统是建立在几个基本假设的基础之上的，这几个基本假设就是量子力学的基本原则。简述如下：

A. 量子力学系统的状态用波函数 $\Psi(\vec{r},t)$ 来描述

由于从实验中显示出微观粒子具有波动特性，作为量子力学中第一个基本假设是状态，它是用波函数 $\Psi(\vec{r},t)$ 来描述，式中 $\vec{r}$ 是位置矢量，t 是时间。必须要弄清楚的是波函数的物理意义，即如何理解波函数与它所描述的微观粒子之间的关系。对这个问题一个比较容易引起错误的看法是：波是由所描述的粒子组成的，表现出来各种波的性质是由大量粒子相互作用的结果，这种看法是和实验事实相矛盾的。实验事实指出：在电子衍射实验中，照片上所显示的衍射图形与入射粒子流的强度无关，那怕是一个一个的电子射到晶体上被衍射。实验发现只要时间足够长也能形成衍射图形。这表明微观粒子的波动性质是每个微观粒子所具有的，与其他粒子无关。但是否可以说微观粒子就是一个波呢？问题也不这么简单，因在衍射实验中，每个电子通过衍射后，在照相底片上只出

9740051

现一个小点，只有大量电子的小点分布才显示出衍射的花纹。总之根据实验事实，一般认为对波函数的物理意义采用以下的统计解释比较合适。

波函数在空间某处的强度$|\Psi|^2$是和该处发现粒子的几率成正比，即波函数描述的是几率波，几率在数学中称为概率。根据这种解释，在电子衍射实验中，对衍射图形中取极大的地方，波的强度大，表明衍射电子投射到这个区域的几率大，当大量同样的粒子投射时，这里得到的粒子多；对衍射极小的地方波的强度小，表明一个粒子投射到这里几率小，它表明波函数描述的是单个粒子的特性，说得普遍一些，波函数描写了单个体系的特性，但这特性要在实验中显示出来，需要存在大量相同而又相互独立的体系，它们构成一个系综。

下面用数学形式表达波函数的物理意义。取波函数为$\Psi(\vec{r},t)$，根据统计解释，其振幅的平方即波的强度，决定了粒子在某处出现的几率，由于Ψ可能是复数，而几率必须是正实数，则强度的表示不用Ψ^2，而用它的绝对值平方，即

$$|\Psi|^2=\Psi^*\Psi$$

其中Ψ^*是Ψ的复共轭函数。在t时刻，空间某处$\vec{r}$附近体积元d^3r中找到粒子几率$\mathrm{d}W$应与d^3r成正比，也与$|\Psi|^2$成正比，表示为

$$\mathrm{d}W(\vec{r},t)=|\Psi(\vec{r},t)|^2\mathrm{d}^3r$$

若将$\mathrm{d}W$除d^3r，得到t时刻在$\vec{r}$附近单位体积中找到粒子的几率，称为几率密度，表示为

$$W(\vec{r},t)=\frac{\mathrm{d}W(\vec{r},t)}{\mathrm{d}^3r}=|\Psi(\vec{r},t)|^2$$

根据几率加法规则，在t时刻，体积V内找到粒子的几率为

$$W(V,t)=\int_V|\Psi(\vec{r},t)|^2\,\mathrm{d}^3r$$

若把积分区域扩充到粒子所允许的一切范围，由于粒子任何时刻

总是在这区域内的某处出现，所以在这区域中找到粒子的几率为1，有

$$\int_{\infty}|\Psi(\vec{r},t)|^2\,\mathrm{d}^3r=1 \tag{1.1}$$

称为波函数的归一化条件。凡是描述微观粒子运动状态的波函数，都应满足归一化条件，符号∞表示积分扩充到粒子所允许的所有空间。

从物理上还要求波函数满足单值、连续和有限的条件。

电子衍射实验表明，微观粒子的物质波也会产生干涉与衍射现象，则要求描述微观粒子运动状态的波函数服从叠加原理。如果波函数 $\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_j,\cdots$ 是描述微观粒子的几个可能的状态，则由这些波函数的线性叠加所得的波函数为

$$\begin{aligned}\Psi &= C_1\Psi_1+C_2\Psi_2+\cdots+C_j\Psi_j+\cdots\\ &=\sum_{j=1}^{n}C_j\Psi_j\end{aligned}$$

这也是粒子的一个可能的状态。其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为常数。这就是量子力学中的状态叠加原理。它是量子力学的一个基本原理。

B. 在量子力学中，系统的力学量 F 用线性厄米算符 $\hat{F}$ 来表示

所谓算符就是一个运算的符号，如 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是一个微商算符、$\sqrt{\ }$ 是开方算符等等。所谓线性算符，就是对任意两个函数 Ψ_1 与 Ψ_2，算符 $\hat{F}$ 满足以下关系

$$\hat{F}(C_1\Psi_1+C_2\Psi_2)=C_1\hat{F}\Psi_1+C_2\hat{F}\Psi_2$$

C_1 和 C_2 为任意常数，$\hat{F}$ 称为线性算符，显然微商算符 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是线性算符，而开方算符 $\sqrt{\ }$ 不是线性算符。线性算符的要求来源于波函数必须满足状态叠加原理。因根据状态叠加原理，若波函数 Ψ_1 和 Ψ_2 是描写系统的可能状态，则 $\Psi=C_1\Psi_1+C_2\Psi_2$ 也应是系统的可能状态。若算符 $\hat{F}$ 作用在波函数 Ψ_1 上得到一个常数 λ 与 Ψ_1 的乘积，

即：

$$\hat{F}\Psi_1=\lambda\Psi_1$$

则 Ψ_1 称为算符 $\hat{F}$ 的本征函数，λ 称为本征值。若 Ψ_2 也是算符 $\hat{F}$ 的本征函数，且本征值也是 λ，则根据状态叠加原理 $C_1\Psi_1+C_2\Psi_2$ 也必须是 $\hat{F}$ 的本征函数，而且本征值也是 λ，这只有 $\hat{F}$ 是线性算符才有可能，因这时

$$\begin{aligned}\hat{F}(C_1\Psi_1+C_2\Psi_2)&=C_1\hat{F}\Psi_1+C_2\hat{F}\Psi_2\\&=C_1\lambda\Psi_1+C_2\lambda\Psi_2\\&=\lambda(C_1\Psi_1+C_2\Psi_2)\end{aligned}$$

如果 $\hat{F}$ 不是线性的，就得不出这个结果。

所谓算符的厄米性，即要求对任一函数 Ψ，算符 $\hat{F}$ 满足以下关系

$$\int\Psi^*\hat{F}\Psi\mathrm{d}^3r=\int(\hat{F}\Psi)^*\Psi\mathrm{d}^3r$$

满足以上关系的算符 $\hat{F}$ 称为厄米算符，或称自厄算符。

算符的厄米性要求来源于力学量平均值必须是实数的要求。

算符厄米性的定义也可以更一般些。对任意两个函数 u 与 v，若算符 $\hat{F}$ 满足关系

$$\int u^*\hat{F}v\mathrm{d}^3r=\int(\hat{F}u)^*v\mathrm{d}^3r$$

则称 $\hat{F}$ 为厄米算符。

当波函数以坐标为变数时，可以给出动量算符，表示为

$$P_x=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\qquad P_y=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}\qquad P_z=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{P}=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla$$

∇ 为矢量算符

$$\nabla=\vec{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

不难证明，微商算符$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$不是厄米算符，而动量算符$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}$是厄米算符。由

$$\int \Psi^* \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi \mathrm{d}^3 r = \iiint \Psi^* \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\Psi^*\Psi\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\int\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi \mathrm{d}x\right)$$

由 Ψ^* 与 Ψ 在边界上为零，上式第一项为零，得

$$\int \Psi^* \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi \mathrm{d}^3 r = \iiint \left(-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*\right)\Psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)^*\Psi \mathrm{d}^3 r \qquad \text{得证}$$

下面简单介绍算符的运算规则。

a. 算符相等

如果两个算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 分别作用在任意函数 Ψ 上所得新函数相等，即

$$\hat{A}\Psi = \hat{B}\Psi$$

则算符 $\hat{A}$ 和算符 $\hat{B}$ 相等，表示为

$$\hat{A} = \hat{B}$$

b. 算符的加减

如果算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 作用于任一函数 Ψ 且满足以下关系

$$\hat{A}\Psi + \hat{B}\Psi = \hat{F}\Psi$$

$$\hat{A}\Psi - \hat{B}\Psi = \hat{G}\Psi$$

则有

$$\hat{F} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\hat{G} = \hat{A} - \hat{B}$$

c. 如果两个算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 先后作用在任一函数 Ψ 上所得结果与另一算符 $\hat{F}$ 作用于 Ψ 的结果一样，即

$$\hat{B}(\hat{A}\Psi) = \hat{F}\Psi$$

就说算符 $\hat{F}$ 等于 $\hat{B}$ 与 $\hat{A}$ 的乘积，表示为

$$\hat{F} = \hat{B}\hat{A}$$

注意，一般情况下，两个算符的乘积不满足交换率

$$\hat{A}\hat{B}\neq\hat{B}\hat{A}$$

如果在某种情况下，两算符满足关系

$$\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

就说算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 是对易的。

在自变量为坐标情况下，坐标是简单乘算符，而动量是微商算符，其他力学量可按以下方法得到：首先把各力学量用经典力学方法写成坐标和动量的函数，然后将其中的坐标与动量变成算符，就得到其他力学量的算符。例如，角动量算符

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$$

$$\hat{\vec{L}}=\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{P}}=\frac{\hbar}{i}\vec{r}\times\nabla$$

又如能量算符

$$H=\frac{1}{2m}P^2+V(r)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)$$

算符运算是一种矩阵运算，其加法满足交换律

$$\hat{A}+\hat{B}-\hat{B}+\hat{A}$$

不难证明，乘法就不满足交换率。

$$x\hat{P}_x-\hat{P}_x x=i\hbar \qquad (1.2)$$

将上式作用在任一函数 $\Psi(x)$ 上有

$$\left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\Psi(x)=i\hbar\Psi(x)$$

利用算符相等定义即证明关系式(1.2)式，称为坐标与动量的对易关系。表示为

$$[x,\hat{P}_x]=i\hbar \qquad (1.2a)$$

任意非对易算符 $\hat{A}$、$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 对易关系满足

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

还可以证明以下算符关系

$$e^{\hat{B}}\hat{x}e^{-\hat{B}}=\hat{x}+[\hat{B},\hat{x}]+\frac{1}{2!}[\hat{B},[\hat{B},\hat{x}]]+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}[\hat{B},\cdots[\hat{B},\hat{x}]\cdots]+\cdots$$

若算符 $\hat{A}$,$\hat{B}$ 满足

$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

则有

$$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{1.3}$$

此式称为 Glauber 公式，下面证明这个公式。引入参变数 λ，取

$$f(\lambda)=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}$$

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda}=e^{\lambda\hat{A}}\hat{A}e^{\lambda\hat{B}}+e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}\hat{B}$$

利用

$$\hat{A}e^{\lambda\hat{B}}=e^{\lambda\hat{B}}[\hat{A}+\lambda[\hat{A},\hat{B}]]$$

得到

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda}=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}[\hat{A}+\hat{B}+\lambda[\hat{A},\hat{B}]]=f(\lambda)(\hat{A}+\hat{B}+\lambda[\hat{A},\hat{B}])$$

$$\frac{df(\lambda)}{d(\lambda)}=(\hat{A}+\hat{B}+\lambda[\hat{A},\hat{B}])d\lambda$$

积分得

$$f(\lambda)=f(0)e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})+\frac{1}{2}\lambda^2[\hat{A},\hat{B}]}$$

由 $f(0)=1$ 得

$$e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}=e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})+\frac{1}{2}\lambda^2[\hat{A},\hat{B}]}$$

以 $e^{-\frac{1}{2}\lambda[\hat{A},\hat{B}]}$ 乘上式两边得

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2[\hat{A},\hat{B}]}$$

取 $\lambda=1$ 得到

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

如令 $\hat{A}\to\hat{B}$,$\hat{B}\to\hat{A}$，则$[\hat{B},\hat{A}]=-[\hat{A},\hat{B}]$，得

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

若算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 对易，$[\hat{A},\hat{B}]=0$，则有

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}$$

C. 在状态 $\Psi(\vec{r},t)$ 测量力学量 F 的平均值为

$$\langle F\rangle=\overline{F}=\int d^3r\Psi^*(\vec{r},t)\hat{F}\Psi(\vec{r},t) \tag{1.4}$$

若波函数 $\Psi_\lambda(\vec{r},t)$ 是算符 $\hat{F}$ 的本征态，满足

$$\hat{F}\Psi_\lambda(\vec{r},t)=\lambda\Psi_\lambda(\vec{r},t)$$

称 λ 为算符 $\hat{F}$ 的本征值，$\Psi_\lambda(r,t)$ 为本征函数，这时测定力学量有确定数值，否则力学量 F 可以取各种不同的值，利用算符计算的是它的平均值，动量的平均值为

$$\langle\vec{P}\rangle=\int d^3r\Psi^*(\vec{r},t)\frac{\hbar}{i}\nabla\Psi(\vec{r},t)$$

在研究辐射场与束缚电子作用时，重要的力学量是电偶极矩 $e\vec{r}$，$\vec{r}$ 为乘算符，相应的平均值为

$$\langle e\vec{r}\rangle=\int d^3re\vec{r}|\Psi(\vec{r},t)|^2$$

下面讨论两个物理量同时测定的问题，若两个力学量算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 相互对易，那它们有共同的本征态。设波函数 $u(r)$ 是算符 $\hat{A}$ 的本征态

$$\hat{A}u(\vec{r})=au(\vec{r})$$

$$\hat{A}\hat{B}u(\vec{r})=\hat{B}\hat{A}u(\vec{r})=a\hat{B}u(\vec{r})$$

表明 $\hat{B}u(r)$ 也是算符 $\hat{A}$ 的本征态，本征值为 a，它们描述系统的同一状态。则有 $\hat{B}u(\vec{r})=bu(\vec{r})$，$u(\vec{r})$ 也是 $\hat{B}$ 的本征态。在两算符的共同本征态中，两力学量能同时确定。

若两算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 不对易，则在同一状态中这两力学量不能同时确定，其不确定程度由测不准关系确定。这将在本节最后进行讨论。

对于一个量子力学系统，通常存在一组最大数目的可对易算

符，称为力学量的完全集合。对这样一组力学量的测量称为最大测量，完全集合力学量的数目等于力学系统的自由度，例如描写氢原子中电子，考虑电子自旋，它有四个自由度，力学量完全集合有 4 个量：即能量、轨道角动量、轨道角动量的投影及自旋投影。相应 4 个量子数为：主量子数 n，角量子数 l，磁量子数 m_l 和自旋磁量子数 m_s。

D. 在非相对论量子力学中，波函数 $\Psi(\vec{r},t)$ 满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=\hat{H}\Psi(\vec{r},t) \tag{1.5a}$$

其中 $\hat{H}$ 为系统的哈密顿算符。

一个带电粒子在电磁场（矢势 $\vec{A}$，标势 φ）中运动，其经典哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2m}[\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)]^2+e\varphi(\vec{r},t)$$

由对应原理，得哈密顿算符

$$\hat{H}(t)=\frac{1}{2m}[\hat{\vec{P}}-\frac{e}{c}\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)]^2-e\hat{\varphi}(\vec{r},t)$$

若不考虑辐射场作用，原子系统哈密顿算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})$$

其中势函数 $V(\vec{r})$ 不显含 t，可以取

$$\Psi(\vec{r},t)=\sum_n C_n(t)u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t}$$

将 $\Psi(\vec{r},t)$ 代入薛定谔方程，可得到 $u_n(\vec{r})$ 且满足方程

$$\hat{H}u_n(\vec{r})=\hbar\omega_n u_n(\vec{r})$$

表明 $u_n(\vec{r})$ 是哈密顿算符 $\hat{H}$ 的本征函数，本征值为 $\hbar\omega_n$。容易证明 $u_n(\vec{r})$ 构成一个完备的正交函数系且满足

$$\begin{aligned}&\int u_n^*(\vec{r})u_m(\vec{r})d^3r=\delta_{nm}\\&\sum_n u_n^*(\vec{r})u_n(\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\end{aligned} \tag{1.5 b}$$

其中 δ_{mn} 和 $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ 分别是 Kronecker 和狄拉克 δ 函数。

E. 量子力学中微观粒子是不可区分的，因此描述全同粒子的波函数，对粒子交换只能是对称的或反对称的。

前面讨论是单粒子系统，尽管上述五条原则对于多粒子系统也是正确的，但在考虑多粒子系统时，由于微观全同粒子的不可分辨性，给描述系统波函数带来了限制。

对 n 个固有性质完全相同的粒子，如 n 个电子，它们的质量、电荷和自旋相同，它们处在相同外场中，其运动规律也相同。从经典力学中可以利用初始条件的不同，将它们区分。因它们将在不同轨道上运动。但在量子力学中，微观粒子具有波动性，既使初始粒子可能由位置不同而区别，但运动后，在各粒子波函数重叠的区域内，就根本分辨不出探测到的是那个粒子，即 n 个性质相同的微观粒子是不可区分的，其中任意两个粒子交换并不改变系统的力学性质。这就是量子力学中全同粒子不可分辨性原理，简称全同性原理。

全同性原理对构成多粒子系统的波函数带来了严格的限制。例如考虑两粒子系统，分别为 a 和 b，它们的波函数为 $\Psi(\vec{r}_a,\vec{r}_b)$，$a,b$ 交换后的波函数为 $\Psi(\vec{r}_b,\vec{r}_a)$，由全同性原理，这两个波函数只能差一个相因子，有

$$\Psi(\vec{r}_b,\vec{r}_a)=e^{i\alpha}\Psi(\vec{r}_a,\vec{r}_b)$$

若将粒子再交换一次应回到原来状态，则

$$\Psi(\vec{r}_a,\vec{r}_b)=e^{2i\alpha}\Psi(\vec{r}_a,\vec{r}_b)$$

可见

$$e^{2i\alpha}=1 \qquad e^{i\alpha}=\pm 1$$

这样有

$$\Psi(\vec{r}_a,\vec{r}_b)=\pm\Psi(\vec{r}_b,\vec{r}_a)$$

因此从全同性原理出发推出两个同类粒子构成系统波函数只能是对称的(粒子交换后波函数不变)或是反对称的(粒子交换后波函

数反号）。

波函数是对称的还是反对称的，反映了两类性质完全不同的粒子。要求波函数对称的粒子为玻色子，要求波函数反对称的粒子为费米子。从粒子本身的性质看，玻色子的自旋为整数，如光子，介子，中间玻色子等，而费米子的自旋为半整数（以 $\hbar=h/2\pi$ 为单位），属于费米子的有电子，μ 子，中子和质子等。费米子组成的复合粒子，如原子、分子，原子外电子为奇数是费米子，是偶数的为玻色子。费米子构成系统时还必须满足泡里不相容原理。在每一个量子态上最多只能有一个费米子，或者说两个费米子不能有完全相同的全部量子数。

量子力学中常用单粒子波函数乘积的线性组合来构成多粒子系统的对称与反对称波函数。如第一个粒子处在 φ_1 态，记为 $\varphi_1(\vec{r}_1)$，第二粒子处在 φ_2 态，记为 $\varphi_2(\vec{r}_2)$，对称波函数

$$\Psi^S(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(\vec{r}_1)\cdot\varphi_2(\vec{r}_2)-\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1)]$$

反对称波函数

$$\Psi^A(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\varphi_1(\vec{r}_1)\cdot\varphi_2(\vec{r}_2)-\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\varphi_1(\vec{r}_1) & \varphi_1(\vec{r}_2)\\ \varphi_2(\vec{r}_1) & \varphi_2(\vec{r}_2)\end{vmatrix}$$

n 个粒子系统的一个对称化波函数为

$$\Psi^S_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n)$$

$$=\left(\frac{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}{n!}\right)^{1/2}\sum_P P\varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)\cdots\varphi_n(\vec{r}_n) \qquad (1.6)$$

其中 P 为交换算符，其作用是使后面态中一对粒子交换，n_i 是处在 i 态上的粒子数，n 个粒子占据 k 个单粒子态有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

反对称波函数用行列式表示更清楚，即

$$\Psi^{A}_{1,2,\cdots,n}(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n)=\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}\begin{vmatrix}\varphi_1(\vec{r}_1) & \varphi_1(\vec{r}_2) & \cdots & \varphi_1(\vec{r}_n)\\ \varphi_2(\vec{r}_1) & \varphi_2(\vec{r}_2) & \cdots & \varphi_2(\vec{r}_n)\\ \vdots & & & \vdots\\ \varphi_n(\vec{r}_1) & \varphi_n(\vec{r}_2) & \cdots & \varphi_n(\vec{r}_n)\end{vmatrix}$$

交换两个粒子相当于行列式中两列对换且行列式反一个符号。若同一态中有两个粒子，则两行相同，行列式为零，这反映泡里原理要求。

由于玻色子和费米子的对称性不同，在量子统计中遵守不同的统计法则。玻色子波函数是对称的，在每一单粒子态上允许有多个玻色子存在，而费米子波函数反对称，在同一单粒子态最多只能存在一个费米子，若第 k 能态上能量为 ε_k，可能有 g_k 个状态，g_k 称为简并度，相应最可几分布为：

玻色分布 $\qquad n_k=\dfrac{g_k}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_k}+1}$

费米分布 $\qquad n_k=\dfrac{g_k}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_k}-1}$

其中 α 和 β 为常数

2. 量子力学中的表象

前面系统状态用波函数 $\Psi(\vec{r},t)$ 表示，其中自变量除时间 t 外还有坐标 $\vec{r}$，则 $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ 表示在 t 时刻，$\vec{r}$ 附近系统出现的几率密度。其实系统的波函数也可以用动量 $\vec{P}$ 为变数，取为 $\varphi(\vec{P},t)$，它可以从 $\Psi(\vec{r},t)$ 通过 Fourier 变换得到

$$\varphi(\vec{P},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\Psi(\vec{r},t)e^{-i\vec{P}\cdot\vec{r}/\hbar} \tag{1.7}$$

逆变换

$$\Psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3P\varphi(\vec{P},t)e^{i\vec{P}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

式中 $\varphi(\vec{P},t)$ 与 $\psi(\vec{r},t)$ 描述同一系统，$|\varphi(\vec{P},t)|^2$ 表示在 t 时刻，$\vec{P}$ 附

近系统出现的几率密度。$\psi(\vec{r},t)$ 和 $\varphi(\vec{P},t)$ 描述同一系统，只是表象不同，犹如一个矢量用不同坐标系来描述一样。人们称 $\psi(\vec{r},t)$ 为位置表象($\vec{r}$ 表象）中的波函数，而 $\varphi(\vec{P},t)$ 为动量表象($\vec{P}$ 表象）中的波函数。

前面将波函数 $\Psi(\vec{r},t)$用能量本征函数 $u_n(\vec{r})$展开

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n C_n(t)u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t} \tag{1.8}$$

其中 $C_n(t)$是能量表象中的波函数。$|C_n(t)|^2$ 是系统处在 $E_n=\hbar\omega_n$ 能态的几率。用 C_n 表示可观测量的期望值。

$$\langle F\rangle = \sum_{n,m} C_n C_m^* F_{m,n} e^{-i\omega_{n,m}t} \tag{1.9}$$

其中

$$F_{m,n} = \int d^3 r u_m^*(\vec{r})\hat{F}u_n(\vec{r})$$

$$\omega_{n,m} = \omega_n - \omega_m$$

当研究原子与电磁场作用时，系统哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \tag{1.10}$$

其中 $\hat{H}_0$ 为原子本身的哈密顿量，若将(1.8)式和(1.10)式代入 Schrödinger 方程(1.4)式，得到：

$$\sum_n(\hbar\omega_n + \hat{V})C_n u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t}$$

$$= \sum_n\left(\hbar\omega_n C_n + i\hbar\frac{\partial C_n}{\partial t}\right)u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t}$$

上式两边消去 $\hbar\omega_n$ 项，将 n 变成 m，利用正交关系(1.5b)可得到几率幅 $C_n(t)$满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_m\langle n|V|m\rangle e^{i\omega_{n,m}t}C_m(t) \tag{1.11}$$

其中用 Drrac 符号表示的矩阵元为

$$\langle n|V|m\rangle = \int d^3 r u_n^*(\vec{r})\hat{V}u_m(\vec{r})$$

(1.11)式称为能量表象中的 Schrödinger 方程。利用它研究原子在

外电磁场作用下引起的跃迁是比较方便的。

3. Dirac 符号

量子光学的表述中常采用 Dirac 符号，它有两个优点：一是运算简单，二是可以不涉及表象来讨论问题，下面简单介绍一下使用 Dirac 符号的一些规则。

量子力学系统的一切可能状态构成一个抽象的空间，称 Hilbert 空间，在这空间中一个矢量用符号 $|\rangle$ 表示，称为右矢。若要标明系统某一特殊状态，可在右矢中标上记号，如 $|\Psi\rangle$。对于能量的本征态，可将量子数 n 放在右矢内，写为 $|n\rangle$。而用左矢 $\langle|$ 表示复共轭空间的抽象矢量。

矢量 $|\Psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$ 的内积用 $\langle\varphi|\Psi\rangle$ 表示，有

$$\langle\varphi|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\varphi\rangle$$

若 $\langle\varphi|\Psi\rangle=0$ 称矢量 $|\Psi\rangle$ 与 $|\varphi\rangle$ 正交，归一化条件为

$$\langle\varphi|\varphi\rangle=1$$

对任一可观测量，如能量 $\hat{H}$ 的本征态 $|n\rangle$，若以它为基矢的表象为能量表象，这表象的基矢满足正交归一化条件

$$\langle n|m\rangle=\delta_{nm}$$

对于位置表象为连续谱，正交归一化条件为

$$\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

在能量表象中，任一态矢 $|\Psi\rangle$ 可以用 $|n\rangle$ 展开

$$|\Psi\rangle = \sum_n \langle n|\Psi\rangle|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\Psi\rangle \qquad (1.12)$$

其中外积 $P_n=|n\rangle\langle n|$ 可看成一个投影算符，它作用在任一矢量 $|\Psi\rangle$ 上，得到 $|\Psi\rangle$ 在基矢 $|n\rangle$ 方向的分量。

$$P_n|\Psi\rangle=|n\rangle\langle n|\Psi\rangle=\langle n|\Psi\rangle|n\rangle=C_n|n\rangle$$

C_n 为 $|\Psi\rangle$ 在 $|n\rangle$ 上的投影，在(1.12)式中 $|\Psi\rangle$ 是任意的，则有

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathrm{I} \qquad (1.13)$$

I 为单位算符，对于连续谱，位置矢量有

$$\int d^3r|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = I$$

$$|\Psi\rangle = \int d^3r|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\Psi\rangle$$

在位置表象中波函数为

$$\Psi(\vec{r},t) = \langle\vec{r}|\Psi\rangle$$

即表明态矢量 $|\Psi\rangle$ 等价于波函数 $\Psi(\vec{r},t)$，但 $|\Psi\rangle$ 没给出具体的表象。用态矢量表示 Schrödinger 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \tag{1.14}$$

用 Dirac 符号表示任一可观测量 F 的期望值为

$$\langle F\rangle = \langle\Psi(t)|\hat{F}|\Psi(t)\rangle$$

在具体表象中，如坐标表象

$$\begin{aligned}\langle F\rangle &= \int d^3r\int d^3r'\langle\Psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\hat{F}|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\Psi\rangle \\ &= \int d^3r\int d^3r'\Psi^*(\vec{r},t)\hat{F}(\vec{r},\vec{r}')\Psi(\vec{r}',t)\end{aligned} \tag{1.15}$$

量子力学中算符是厄米的，应是定域的有

$$\hat{F}(\vec{r},\vec{r}') = \hat{F}(\vec{r},\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

得到

$$\langle F\rangle = \int d^3r\Psi^*(\vec{r},t)\hat{F}(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)$$

这与前面给出结果相同。

4. 量子力学中的绘景

这里简单介绍薛定谔绘景、海森堡绘景与相互作用绘景。

若系统在某时刻处于状态 $|\Psi\rangle$，此时可观测量 F 的期望值为

$$\langle F\rangle = \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle$$

当系统变化时，$\langle F\rangle$ 随时间变化，这变化可来源于 $|\Psi\rangle$，也可以是算符 $\hat{F}$ 的变化。

在薛定谔绘景中，可观测量期望值变化来自态矢量的变化，而算符不变，这时可观测量的期望值为

$$\langle F\rangle=\langle\Psi_S(t)|\hat{F}_S|\Psi_S(t)\rangle$$

下标 S 表示薛定谔绘景，$|\Psi_S(t)\rangle$满足动力学方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_S(t)\rangle=\hat{H}_S|\Psi_S(t)\rangle \tag{1.16}$$

作为描述运动规律的另一种方式是认为可观测量算符 $\hat{F}(t)$ 是时间 t 的函数，而$|\Psi\rangle$不变，并称作海森堡绘景，相应的期望值为

$$\langle F\rangle=\langle\Psi_H|\hat{F}_H(t)|\Psi_H\rangle$$

其中算符 $\hat{F}_H(t)$满足运动方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{F}_H(t)=[\hat{F}_H(t),\hat{H}(t)] \tag{1.17}$$

同一系统的可观测量 F 在不同的绘景中期望值相等，有

$$\langle\Psi_S(t)|\hat{F}_S|\Psi_S(t)\rangle=\langle\Psi_H|\hat{F}_H(t)|\Psi_H\rangle$$

不论是薛定谔绘景中态矢量随时间变化，还是海森堡绘景中算符随时间变化，都可以用一个时间演变算符来表示。

在薛定谔绘景中，当时间从 $t_0\to t$，态矢量从 $|\Psi_S(t_0)\rangle\to|\Psi_S(t)\rangle$，时间演变算符 $U(t,t_0)$有

$$|\Psi_S(t)\rangle=U(t,t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle \tag{1.18}$$

从方程(1.17)式给出

$$U(t,t_0)=\exp[-\mathrm{i}\hat{H}_S(t-t_0)/\hbar]$$

在海森堡绘景中算符有以下关系

$$\hat{F}_H(t)=U^{-1}(t,t_0)\hat{F}_H(t_0)U(t,t_0) \tag{1.19}$$

其中 $U^{-1}(t,t_0)$是 $U(t,t_0)$的逆变换

$$U^{-1}(t,t_0)=U(t_0,t)$$

时间演变算符是幺正算符，逆变换与厄米共轭算符相等，即

$$U^{+}(t,t_0)=U^{-1}(t,t_0)$$

如果系统受到某种微扰作用时，其哈密顿量算符可写为

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}$$

这时对系统变化描述可以采用相互作用绘景。在相互作用绘景中，态矢量$|\Psi_I(t)\rangle$与$|\Psi_S(t)\rangle$关系可以用下列幺正变换得到

$$|\Psi_S(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}|\Psi_I(t)\rangle \tag{1.20}$$

而可观测量算符关系为

$$|\hat{F}_I(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{F}_S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar} \tag{1.21}$$

态矢量$|\Psi_I(t)\rangle$满足动力学方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = \hat{V}_I(t)|\Psi_I(t)\rangle \tag{1.22}$$

其中 $\hat{V}_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}_S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}$

$|\Psi_I(t)\rangle$随时间变化也可以用时间演变算符$U_I(t,t_0)$表示为

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_I(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$

$U_I(t,t_0)$满足幺正条件

$$U_I^{+}(t,t_0) = U_I^{-1}(t,t_0) = U_I(t_0,t)$$

和初始条件

$$U_I(t,t_0) = 1$$

它满足微分方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,t_0) = \hat{V}_I(t)U_I(t,t_0) \tag{1.23}$$

5. 简单谐振子

在量子光学中简单谐振子起十分重要作用，它可以用来描述辐射场，也可以描述分子振动及二能级原子。

频率为ω、质量为1的谐振子经典能量为

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

量子化以后哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{1.24}$$

相应的本征函数可通过解薛定谔方程得到

$$\Psi_n(q)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}H_n(\alpha,q)\exp(-\alpha^2q^2/2)$$

其中　$\alpha=\sqrt{\omega/\hbar}$，$H_n(\alpha,q)$为厄密多项式

$$H_0(x)=1\qquad H_1(x)=2x\qquad H_2(x)=4x^2-2$$

相应的本征能量是

$$E_n=\hbar\omega_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})\qquad n=0,1,2,\cdots\tag{1.25}$$

引入算符

$$\begin{aligned}\hat{a}&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q+\mathrm{i}\hat{P})\\ \hat{a}^+&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q-\mathrm{i}\hat{P})\end{aligned}\tag{1.26}$$

若q与$\hat{P}$满足对应关系

$$[\hat{q},\hat{P}]=\mathrm{i}\hbar$$

容易证明

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=\hat{a}\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}=1$$

用$\hat{a}$与$\hat{a}^+$表示哈密顿算符为

$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})\tag{1.27}$$

其中$\hat{a}$为湮灭算符，$\hat{a}^+$为产生算符。若取$|0\rangle$为真空态，即谐振子的最低能态有

$$\hat{a}|0\rangle=0$$

$$\hat{H}|0\rangle=\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})|0\rangle=\hbar\omega_0|0\rangle$$

最低能量本征值为

$$\hbar\omega_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$$

由于$[\hat{H},\hat{a}^+]=\hbar\omega\hat{a}^+$，故

$$\hat{H}\hat{a}^+|0\rangle=[\hat{a}^+\hat{H}+\hbar\omega\hat{a}^+]|0\rangle=\hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{a}^+|0\rangle$$

同样可给出

$$\hat{H}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle$$

则表明 E_n 本征态 $|n\rangle\propto(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle$则归一化本征态为

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle \tag{1.28}$$

$|n\rangle$不是 $\hat{a}^{+}$ 与 $\hat{a}$ 本征态，取

$$\hat{a}|n\rangle=A_n|n-1\rangle$$

则 $$\langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle=|A_n|^{2}\langle n-1|n-1\rangle=|A_n|^{2}$$

由于 $\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle$，则$|A_n|^{2}=n$，$A_n=\sqrt{n}$，得

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

同理

$$\hat{a}^{+}|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

下面给出基态$|0\rangle$在位置表象中波函数 $U_0(q)$。利用湮灭算符 $\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q+\mathrm{i}\hat{P})$作用在 $U_0(q)$上有

$$(\omega q+\mathrm{i}\hat{P})U_0(q)=0$$

利用 $\hat{P}=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}U_0 q=-\frac{\omega}{\hbar}qU_0(q)$$

该方程的归一化解为

$$U_0(q)=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2\hbar}q^{2}}$$

这与解薛定谔方程得到的解(1.25)式一致。利用 $U_0(q)$可以给出高阶本征态

$$U_n(q)=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}U_0(q)=\frac{1}{\sqrt{n!\,(2\hbar\omega)^{n}}}\left(\omega q-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^{n}U_0(q)$$

这是谐振子本征函数的另一种表示方法。

6. 测不准关系

在量子力学中，某些成对的力学量（或称可观测量）不能同时准确测定。人们感兴趣的是这些测不准量的数值有多大，并将这种测不准量的数值关系称为测不准关系，测不准关系的存在是微观粒子波动性的一个表现。

坐标和对应的动量是一对不可同时确定的力学量。坐标和动量的测不准量，由偏离平均值的均方差来表征，分别为

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int \Psi^* (x - \langle x \rangle)^2 \Psi \mathrm{d}^3 r$$

$$\langle \Delta P_x^2 \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x} - \langle P_x \rangle \right)^2 \Psi \mathrm{d}^3 r$$

为推导简单起见，取$\langle x \rangle = 0$，$\langle P_x \rangle = 0$，测不准量的乘积为

$$\langle \Delta P_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle = -\hbar^2 \int \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \mathrm{d}^3 r \int \Psi^* x^2 \mathrm{d}^3 r$$

利用分部积分得

$$\int \Psi^* \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \Psi \mathrm{d}^3 r = -\int \frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}^3 r$$

因而得到

$$\langle \Delta P_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle = \hbar^2 \int \frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}^3 r \int \Psi^* x^2 \Psi \mathrm{d}^3 r$$

利用数学中 Schwarz 不等式

$$\int f^* f \mathrm{d}^3 r \int g^* g \mathrm{d}^3 r \geqslant \frac{1}{2} \left(\int f g^* \mathrm{d}^3 r + \int g f^* \mathrm{d}^3 r \right)^2$$

令 $f = \partial \Psi / \partial x$，$g - x\Psi$ 得

$$\langle \Delta P_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle \geqslant \frac{\hbar}{4} \left(\int \frac{\partial \Psi}{\partial x} x \Psi^* \mathrm{d}^3 r + \int x \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \mathrm{d}^3 r \right)^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left(\int x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\Psi, \Psi^*) \mathrm{d}^3 r \right)^2$$

利用分部积分

$$\int x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Psi,\Psi^*)\mathrm{d}^3r=-\int(\Psi,\Psi^*)\mathrm{d}^3r=-1$$

取$[\langle\Delta P_x^2\rangle]^{1/2}=\Delta P_x$，$[\langle\Delta x^2\rangle]^{1/2}=\Delta x$得

$$\Delta P_x\Delta x\geqslant\hbar/2$$

这就是一对正则力学量所满足的测不准关系，满足测不准关系的其他力学量共轭对有

$$\Delta P_y\Delta y\geqslant\hbar/2$$

$$\Delta P_z\Delta z\geqslant\hbar/2$$

$$\Delta E\Delta\tau\geqslant\hbar/2$$

$$\Delta\varphi_z\Delta J_z\geqslant\hbar/2$$

$$\Delta n\Delta\varphi\geqslant 1$$

其中E和τ可以是原子能态的能量和它的寿命；φ_z和J_z是绕Z轴的角度和角动量；n和φ是谐振子的振子数和振动位相。

下面分析在什么条件下，测不准量乘积$\Delta x\Delta P_x$取$\hbar/2$。从Schwarz不等式看出，当f与g只差一个常数时，$f=\alpha g$，$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}=-\alpha\times\Psi$，$\Psi=N\mathrm{e}^{-\alpha x^2/2}$，由$\int\Psi^*\Psi\mathrm{d}x=1$，得$N=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$则

$$\Psi=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-\alpha x^2/2}$$

由
$$\langle\Delta x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^2x^2\mathrm{d}x=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha}$$

则
$$\Psi(x_0)=\left(\frac{1}{2\pi\langle\Delta x^2\rangle}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-(x^2/4\langle\Delta x^2\rangle)}$$

这表明最小测不准量的波包为高斯型。

由于高斯型的富里叶变换为另一高斯型，因此在动量表象中最小测不准波包也为高斯型

$$\varphi(P,0)=\left(\frac{1}{2\pi\langle\Delta P_x^2\rangle}\right)^{1/2}\exp(-P_x^2/4\langle\Delta P_x^2\rangle)$$

很容易证明，在最小测不准波包时

$$\langle \Delta x^2\rangle\langle \Delta P_x^2\rangle=\frac{\hbar^2}{4}$$

一般激光器发出的光是相干光，其坐标与动量的不确定量对应最小测不准量，相应的光脉冲在坐标空间具有高斯型分布。

§1-2　量子跃迁

1. 跃迁与跃迁几率

计算从一个量子态到另一个量子态的跃迁几率是量子力学理论应用的重要问题之一。特别在量子光学中，因量子光学主要研究电磁场与物质的相互作用，故量子跃迁问题显得特别重要。

假定初始时，系统处在某一确定状态，具体说处在某一能态，能量 $E=E_i$，系统状态波函数

$$\Psi(\vec{r},0)=u_i(\vec{r})$$

从 $t=0$ 开始，外界给一个微小作用，系统状态将发生变化，且变化到新状态 $\Psi(\vec{r},t)$，此状态已不是某一确定能态，可能是许多能态的叠加，如下式所示

$$\Psi(\vec{r},t)=\sum_n C_n(t)u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t}$$

其中系数绝对值平方 $|C_n(t)|^2$ 是在 $\Psi(\vec{r},t)$ 中测到状态 $E=E_n$ 的几率。设 $t=0$ 时，系统处在状态 $u_i(\vec{r})$，则到状态 $u_n(\vec{r})$的几率是：当 $n\neq i$ 时为 0，通过扰动后测到的几率为 $P_n=|C_n(t)|^2$，所以 P_n 就是通过微扰作用后系统从状态 E_i 跃迁到 E_n 的跃迁几率。量子跃迁理论最重要的问题是计算量子跃迁几率。本节将推出一般跃迁几率公式。

假定扰动是微弱的，可以用微扰论来处理，系统总的哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}(t)$$

$\hat{H}_0$ 为没有扰动的哈密顿量，满足方程

$$\hat{H}_0 u_n(\vec{r}) = \hbar\omega_n u_n(\vec{r})$$

从非定态薛定谔方程出发，可以给出几率幅 $C_n(t)$ 满足的方程(1.11)式

$$\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_m \langle n|V|m\rangle e^{i\omega_{n,m}t}C_m(t)$$

其中矩阵元

$$\langle n|V|m\rangle = \int d^3 r u_n^*(\vec{r})\hat{V}u_m(\vec{r})$$

$$\omega_{n,m} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m)$$

$\langle n|V|m\rangle$ 称为微扰矩阵元，$\omega_{n,m}$ 是系统从 m 态跃迁到 n 态时辐射电磁波的圆频率。对于(1.11)式没有取任何近似时，它等价于薛定谔方程。当 V 为微扰时，可以用逐级近似处理。

一级近似：

取 $C_m(t) = C_i(0) = 1$，故(1.11)式成为

$$\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) \approx \frac{\partial}{\partial t}C_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\langle n|V|i\rangle e^{i\omega_{n,i}t}$$

进行积分，得

$$C_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle n|V|i\rangle e^{i\omega_{n,i}t'}dt' \tag{1.29}$$

如果将(1.29)式代入(1.11)式的右边，可以给出 $C_n(t)$ 的二级近似为

$$C_n^{(2)}(t) = \frac{-1}{\hbar^2}\sum_m \int_0^t \langle n|V|m\rangle e^{i\omega_{n,m}t'}dt' \int_0^{t'} \langle m|V|i\rangle e^{i\omega_{m,i}t''}dt'' \tag{1.30}$$

只要知道微扰作用 $V(t)$ 的具体形式，就可以通过(1.29)式或(1.30)式求出末态的振幅，从而得到跃迁几率。下面讨论两种特殊的情况：(1)常数微扰，(2)谐振微扰。

2. 与时间无关的微扰

设微扰作用在 0 时刻加入，t 时刻撤除，且在整个扰动过程中

微扰作用大小不随时间变化，这时微扰矩阵元$\langle n|V|i\rangle$可以从(1.29)式积分号下提出来，完成积分

$$
\begin{aligned}
C_n^{(1)}(t) &= \frac{-i}{\hbar}\langle n|V|i\rangle\frac{e^{i\omega_{n,i}t}-1}{i\omega_{n,i}} \\
&= \frac{-i}{\hbar}\langle n|V|i\rangle e^{i\omega_{n,i}t/2}\frac{\sin(\omega_{n,i}t/2)}{\omega_{n,i}/2}
\end{aligned}
$$

状态从 i 态跃迁到 n 态的几率为

$$
|C_n^{(1)}|^2 = \frac{4|\langle n|V|i\rangle|^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\sin^2(\omega_{n,i}t/2)}{\omega_{n,i}^2} \tag{1.31}
$$

为了看出几率分布的情况，画出$\sin^2(\omega_{n,i}t/2)/\omega_{n,i}^2$随$\omega_{n,i}$变化曲线，如图 1.1 所示。图中明显表示出只有$|\omega_{n,i}|<\frac{2\pi}{t}$才明显不为零，当$\omega_{n,i}=0$时有极大值，利用罗比达法则得到

$$
\lim_{\omega_{n,i}\to 0}\frac{\sin^2(\omega_{n,i}t/2)}{\omega_{n,i}^2} = \frac{1}{4}t^2
$$

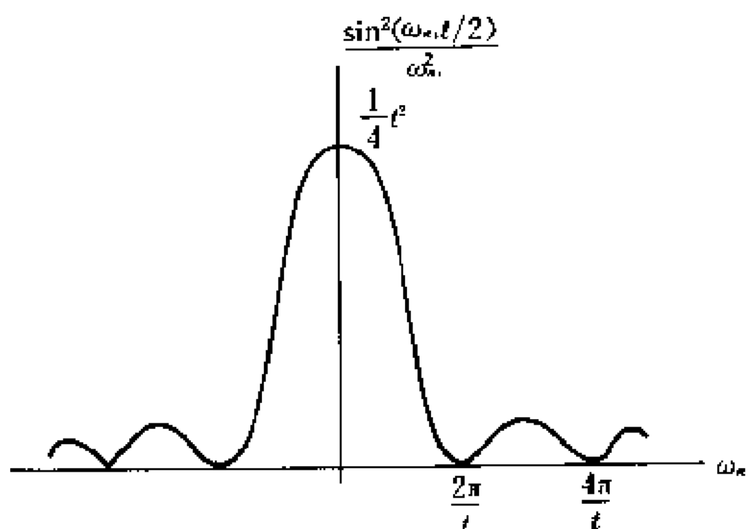


图 1.1

说明主峰高度与t^2成正比，而宽度与$\frac{1}{t}$成正比，则曲线以下的面积与t成正比。这表明跃迁几率与t成正比，单位时间跃迁几率，即跃迁速率Γ与时间无关，这一点与实验结果符合。

当末态连续分布时，对连续谱不能说末态为某一能态，只能说

系统处在某一能量区间 ΔE_n 内任一能态的几率，在 ΔE_n 内能态数目为

$$\mathscr{D}(E_n)\Delta E_n$$

$\mathscr{D}(E_n)$为末态的能级密度。因此在时间 t 内，由于微扰作用，使系统从 E_i 到 ΔE_n 内任一能态的几率为

$$\int_{\Delta E_n} |C_n^{(1)}|^2 \mathscr{D}(E_n)\mathrm{d}E_n \tag{1.32}$$

由 $E_n = \hbar\omega_{n,i} + E_i, \mathrm{d}E_n = \hbar\mathrm{d}\omega_{n,i}$，在初始小范围内，可以假定因子 $\mathscr{D}(E_n)|\langle n|V|i\rangle|^2$ 的变化比因子$\dfrac{\sin^2(\omega_{n,i}t/2)}{\omega_{n,i}^2}$ 慢得多，积分时可以提到积分号外面去，仅对后面因子积分，利用定积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \pi$$

可以得到跃迁几率

$$P_T = \frac{2\pi t}{\hbar}\mathscr{D}(E_n)|\langle n|V|i\rangle|^2 \tag{1.33}$$

单位时间跃迁几率，即跃迁速率为

$$\Gamma = \frac{\mathrm{d}P_T}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|V|i\rangle|^2\mathscr{D}(E_n) \tag{1.34}$$

费米将这公式称为 Golden Rule Rate（金字规律）。

3. 频率为 ω 的谐振微扰

设微扰作用只在时间 0～t 内进行，微扰作用具有谐振形式

$$V = V_0\cos\omega t = \frac{V_0}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}] \tag{1.35}$$

将(1.35)式代入(1.29)式得到

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{-\mathrm{i}}{2\hbar}\langle n|V_0|i\rangle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{n,i}t'}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}]\mathrm{d}t'$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\langle n|V_0|\mathrm{i}\rangle\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{n,i}+\omega)t} - 1}{\mathrm{i}(\omega_{n,i}+\omega)} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{n,i}-\omega)t} - 1}{\mathrm{i}(\omega_{n,i}-\omega)}\right] \tag{1.36}$$

为明确起见，取 $\omega_{n,i}>0$，则 $\omega_{n,i}+\omega$ 总是正，则大于 $\omega_{n,i}$，第一项为振荡函数，随 t 变化，对于第二项，当 $\omega_{n,i}=\omega$ 时发生共振，分子分母均

为零，利用罗比达法则，可得到它随 t 增加，且对跃迁起重要作用，因此在通常情况下，人们忽略第一项只考虑第二项，物理上相当于只考虑光场和原子的矢量在相平面内同方向旋转的情况，故称为旋转波近似。

在旋转波近似下，得到跃迁几率的一级近似为

$$|C_n^{(1)}(t)|^2=\frac{|\langle n|V_0|i\rangle|^2}{4\hbar^2}\frac{\sin^2[(\omega_{ni}-\omega)t/2]}{(\omega_{ni}-\omega)^2/4} \tag{1.37}$$

从式中看出只有末态能量 $E_n=E_i+\hbar\omega$ 时，才有明显的跃迁，这在讨论辐射场与分子原子系统作用时很重要，因只有辐射场光子频率与分子原子系统二能级差相匹配时，才会引起明显的作用。

如果末态不是一个能态，有连续分布，这时引入能态密度 $\mathscr{D}(\omega)$，这时费米的 Golden 跃迁速率公式为

$$\Gamma=\frac{\pi}{2\hbar^2}\mathscr{D}(\omega)|\langle n|V_0|i\rangle|^2 \tag{1.38}$$

4. 二能级原子模型

已知原子中电子能量是分立谱，如氢原子

$$E_n=-\frac{E_1}{n^2} \qquad E_1=13.6\ \mathrm{eV}$$

若光源发出单色光射在原子上，显然只有当光的频率满足条件

$$\omega=\frac{E_n-E_m}{\hbar}$$

时，才有较大的跃迁几率。因此在这过程中，原子中 E_n 与 E_m 二能级将起主要作用，在旋转波近似下，若仅考虑这二能级而忽略其他能级作用，则引出二能级原子模型。

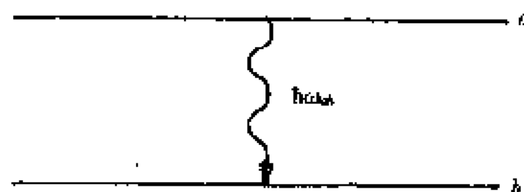


图 1.2

现考虑二能级 a、b，如图1.2所示。此时系统波函数为

$$\Psi(\vec{r},t)=C_a(t)e^{-i\omega_a t}u_a(\vec{r})+C_b(t)e^{-i\omega_b t}u_b(\vec{r}) \tag{1.39}$$

与电磁场作用取偶极近似

$$V(\vec{r},t)=-e\vec{r}\cdot\vec{E}(R,t) \tag{1.40}$$

式中，R 为原子质心坐标。若电磁场的光波波长大于原子的线度，在原子线度内电场是近似均匀的。这时 $\vec{E}(R,t)$ 可用 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 代替。

由于 $e\vec{r}$ 具有奇宇称，则对同一能级的矩阵元为零，因电磁作用宇称守恒，即

$$er_{aa}=\int d^3re\vec{r}\,|u_a(\vec{r})|^2=0$$

在 a、b 两能级之间的相互作用矩阵元可不消失，即

$$V_{ab}=-P_bE(r,t)$$

其中

$$P_b=er_{ab}=\int d^3rer_Eu_a^*(\vec{r})u_b(\vec{r})$$

是电偶极矩沿 $\vec{E}$ 方向分量。忽略 E 空间变化，取

$$E(t)=E_0\cos\omega t$$

则相互作用矩阵元

$$V_{ab}=-P_bE_0\cos\omega t \tag{1.41}$$

将(1.41)式代入(1.37)式，取 a 为末态 n，b 为初态 i，有

$$|C_a^{(1)}|^2=\left(\frac{P_bE_0}{2\hbar}\right)^2\frac{\sin^2[(\omega_{ab}-\omega)t/2]}{(\omega_{ab}-\omega)^2/4} \tag{1.42}$$

这表示在外场作用下，二能级原子吸收能量跃迁几率对应受激吸收。另外若取初态为 a 而末态为 b，相应跃迁几率为 $|C_b^{(1)}|^2$，其过程为受激辐射，可以证明 $|C_b^{(1)}|^2=|C_a^{(1)}|^2$。表明受激辐射与受激吸收几率相等，它来源于微观可逆性。

当 $\omega\neq\omega_{ab}$，中间存在一个频率差 $\delta=\omega_{ab}-\omega$，这时二能级原子波函数表示为

$$\Psi(\vec{r},t)=C_a(t)u_a(\vec{r})\exp\left[i\left(\frac{1}{2}\delta-\omega_a\right)t\right]$$

$$+C_b(t)u_b(\vec{r})\exp[-\mathrm{i}(\frac{1}{2}\delta+\omega_b)t]$$

将上式代入薛定谔方程可给出几率幅变化

$$\frac{\partial C_a}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}}{2}(-\delta C_a+R_0C_b)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}}{2}(\delta C_b+R_0C_a) \tag{1.43}$$

其中 R_0 为拉比(Rabi)振荡频率

$$R_0=P_EE_0/\hbar$$

若精确共振 $\delta=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2C_b}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{4}R_0^2C_b$$

并取 $C_a(0)=0, C_b(0)=1$，得

$$C_b(t)=\cos\frac{1}{2}R_0t$$

$$C_a(t)=\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}R_0t$$

这样波函数在上下能态间以频率 R_0 振荡。

若 $\delta\neq0$，(1.43)式可以写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}C_a(t)\\C_b(t)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}i\begin{bmatrix}-\delta & R_0\\R_0 & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a(t)\\C_b(t)\end{bmatrix} \tag{1.43a}$$

方程可写成矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}M\vec{C}$$

若取方程解为

$$\vec{C}(t)=\vec{C}(0)\exp[\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda t]$$

得到

$$\det(M-\lambda I)=0$$

得到本征值 $\lambda=\pm R$

$$R=\sqrt{\delta^2+R_0^2} \tag{1.44}$$

称为广义拉比振荡频率。取方程(1.43)式解为

$$C_a(t)=C_a(0)\cos\frac{1}{2}Rt+A\sin\frac{1}{2}Rt$$

$$C_b(t)=C_b(0)\cos\frac{1}{2}Rt+B\sin\frac{1}{2}Rt$$

将上两式代入(1.43)式，并取 $t=0$，可解出常数 A 和 B，最后得到方程(1.43)的解为

$$\begin{bmatrix}C_a(t)\\C_b(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{1}{2}Rt-\mathrm{i}\frac{\delta}{R}\sin\frac{1}{2}Rt & \mathrm{i}\frac{R_0}{R}\sin\frac{1}{2}Rt\\-\mathrm{i}\frac{R_0}{R}\sin\frac{1}{2}Rt & \cos\frac{1}{2}Rt+\mathrm{i}\frac{\delta}{R}\sin\frac{1}{2}Rt\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a(0)\\C_b(0)\end{bmatrix}\qquad(1.45)$$

当衰减不存在时，此解是讨论相干瞬态过程的出发点。

§1-3 密度矩阵

这节将讨论有衰减的二能级系统，当二能级同时衰减时，不能用简单的态矢量来描述，而必须用密度矩阵。因此本节先从二能级系统中引入密度矩阵概念，然后推扩到一般，最后引出半经典量子光学中最基本的方程——光学布洛赫(Bloch)方程。

1. 衰减二能级系统

由自发辐射和原子碰撞导致原子能态是不稳定的，且都有一定的寿命。对有一定寿命的二能级原子系统，它的动力学方程，可以从方程(1.43)式唯象地加入衰减项得到

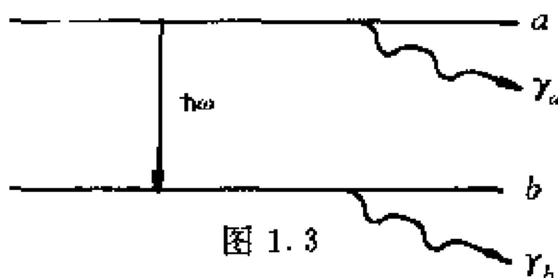


图 1.3

$$\frac{dC_a}{dt} = -\frac{1}{2}(\gamma_a + i\delta)C_a + \frac{1}{2}iR_0C_b$$
$$\frac{dC_b}{dt} = -\frac{1}{2}(\gamma_b - i\delta)C_b - \frac{1}{2}iR_0C_a \tag{1.46}$$

其中 $\delta = \omega_{ab} - \omega$，$R_0 = P_a E_0 / \hbar$ 为拉比振荡频率。γ_a 与 γ_b 为 a 与 b 能态的衰减常数，它定义为能态寿命的倒数，能态寿命是能态的状态几率下降到初始值的 $1/e$ 的时间。

为简单起见，假定 $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$，引入

$$C_b'(t) = C_b(t)e^{\gamma t/2}$$
$$C_a'(t) = C_a(t)e^{\gamma t/2} \tag{1.47}$$

代入(1.46)式，得到 C_b' 和 C_a' 的方程与(1.43)式完全一样，类似上节利用微扰法求解，可以得到一级近似解，如(1.42)式所示，最后得到近似解

$$|C_a^{(1)}(t)|^2 = \frac{R_0^2}{4}e^{-\gamma t}\left\{\frac{\sin[(\omega_{ab} - \omega)t/2]}{(\omega_{ab} - \omega)/2}\right\}^2 \tag{1.48}$$

几率幅随时间减少，这时波函数不再归一化。$\gamma_a|C_a(t)|^2$ 是单位时间原子从 a 能级衰变的几率。从 a 能级衰变的总几率为

$$\Gamma = \gamma_a\int_0^\infty dt|C_a(t)|^2 \tag{1.49}$$

类似于(1.43)式，方程(1.46)具有以下形式解

$$\vec{C} = \vec{C}(0)e^{i\lambda t}$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{2}(i\gamma_{ab} \pm \mu)$$

上式中 $\gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b)$，为平均衰减率；

$\mu = \sqrt{[\delta - \frac{1}{2}i(\gamma_a - \gamma_b)]^2 + R_0^2}$，为复拉比振荡频率。

由此得出方程(1.46)式解的形式为

$$
\begin{aligned}
C_a(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_{ab}t\right)\left[C_a(0)\cos\frac{1}{2}\mu t + A\sin\frac{1}{2}\mu t\right] \\
C_b(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_{ab}t\right)\left[C_b(0)\cos\frac{1}{2}\mu t + B\sin\frac{1}{2}\mu t\right]
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

将(1.50)式代入(1.46)式，取 $t=0$，可以解出积分常数

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{2}(\gamma_a-\gamma_b)+\mathrm{i}\delta\right]C_a(0) + \frac{\mathrm{i}}{\mu}R_0C_b(0) \\
B &= \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{2}(\gamma_a-\gamma_b)+\mathrm{i}\delta\right]C_b(0) + \frac{\mathrm{i}}{\mu}R_0C_a(0)
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

最后给出方程(1.46)式的解为

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{bmatrix} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_{ab}t\right) \\
&\cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{2}\mu t - \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{2}(\gamma_a-\gamma_b)+\mathrm{i}\delta\right]\sin\frac{1}{2}\mu t & \mathrm{i}R_0\frac{1}{\mu}\sin\frac{1}{2}\mu t \\ \mathrm{i}\frac{R_0}{\mu}\sin\frac{1}{2}\mu t & \cos\frac{1}{2}\mu t + \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{2}(\gamma_a-\gamma_b)+\mathrm{i}\delta\right]\sin\frac{1}{2}\mu t \end{bmatrix} \\
&\cdot \begin{bmatrix} C_a(0) \\ C_b(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

若取 $C_a(0)=1$，$C_b(0)=0$，从上式中解出 $C_a(t)$，代入(1.49)式，可给出 a 能态衰变几率为

$$
\Gamma = \frac{1}{2}\frac{R_0^2\gamma_{ab}/\gamma_b}{\delta^2+\gamma_{ab}^2(1+I_0)}
\tag{1.53}
$$

其中 $I_0=R_0^2/(\gamma_a\gamma_b)$，为无量纲强度。当 $\omega_{ab}=\omega_0$，$\delta=0$ 即共振时，$\Gamma\to\gamma_{ab}/\gamma_a$，趋近于常数。

2. 二能级原子的密度矩阵

在半经典理论中，大都采用薛定谔绘景，在这种绘景中波函数写成

$$
\Psi(\vec{r},t) = c_a(t)u_a(\vec{r}) + c_b(t)u_b(\vec{r})
$$

注意这里用小写 $c(t)$，它包括 $\Psi(\vec{r},t)$ 的全部时间函数。若用狄拉克符号表示，则

$$|\Psi(t)\rangle = c_a(t)|a\rangle - c_b(t)|b\rangle$$
$$= \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

而投影算符 $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ 定义为密度算符，其矩阵表示为

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} (c_a^*, c_b^*) = \begin{pmatrix} c_a c_a^* & c_a c_b^* \\ c_b c_a^* & c_b c_b^* \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

其中　$\rho_{aa} = c_a c_a^*$ 是原子在上能级的几率；

$\rho_{bb} = c_b c_b^*$ 是原子在下能级的几率；

$\rho_{ab} = c_a c_b^* = \rho_{ba}^*$ 为无量纲复偶极矩。它允许在能态 a 与 b 之间产生电偶极跃迁。

不难证明密度矩阵具有投影的性质

$$\rho^2 = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho$$

可观测量 F 的期望值

$$\begin{aligned}\langle F\rangle &= \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle \\ &= (c_a^*\langle a| + c_b^*\langle b|)\hat{F}(c_a|a\rangle + c_b|b\rangle) \\ &= c_a^* c_a\langle a|\hat{F}|a\rangle + c_b^* c_b\langle b|\hat{F}|b\rangle + c_a^* c_b\langle a|\hat{F}|b\rangle + c_b^* c_a\langle b|\hat{F}|a\rangle \\ &= \rho_{aa}F_{aa} + \rho_{bb}F_{bb} + \rho_{ab}F_{ba} + \rho_{ba}F_{ab}\end{aligned}$$

其中

$$F_{ba} = \langle b|\hat{F}|a\rangle = F_{ab}^*$$

一般表示为

$$\langle F\rangle = \sum_n \sum_m \rho_{nm} F_{mn} = \sum_n (\rho F)_{nn} = tr(\rho\hat{F}) \tag{1.56}$$

tr 表示矩阵迹。

上面已知量子系统在状态 $|\Psi\rangle$ 称纯系综，若对一量子系统，并不知它在哪个确切的 $|\Psi\rangle$ 上，而只知在 $|\Psi\rangle$ 上的几率为 P_Ψ，这时要用混合系综来描述。混合系综中密度矩阵定义为

$$\rho = \sum_\Psi P_\Psi |\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{1.57}$$

态矢量

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$$

$$\rho = \sum_\Psi P_\Psi \sum_n \sum_m C_n C_m^* |n\rangle\langle m| = \sum_n \sum_m \rho_{nm} |n\rangle\langle m|$$

可观测量 F 的期望值

$$\begin{aligned}
\langle F\rangle &= \sum_\Psi P_\Psi \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle = \sum_\Psi P_\Psi \sum_k \langle\Psi|\hat{F}|k\rangle\langle k|\Psi\rangle \\
&= \sum_k \langle k|\sum_\Psi \rho_\Psi |\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{F}k\rangle = \sum_k \langle k|\hat{\rho},\hat{F}|k\rangle \\
&= \sum_k (\rho,\hat{F})_{kk} = tr(\rho,\hat{F})
\end{aligned} \tag{1.58}$$

3. 密度矩阵的动力学方程

下面从薛定谔方程出发，推出密度矩阵及矩阵元的动力学方程。先看纯系综情况：

由
$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle$$

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial\langle\Psi|}{\partial t} = \langle\Psi|\hat{H}$$

则
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}\langle\Psi| + |\Psi\rangle\frac{\partial\langle\Psi|}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}|\Psi\rangle\langle\Psi| - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}|\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{H} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(\hat{H}\rho - \rho\hat{H}) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H},\rho]
\end{aligned} \tag{1.59}$$

对密度矩阵元的动力学方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho_{mn}}{\partial t} &= \langle m|\frac{\partial\rho}{\partial t}|n\rangle \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\sum_k [\langle m|\hat{H}|k\rangle\langle k|\rho|n\rangle - \langle m|\rho|k\rangle\langle k|\hat{H}|n\rangle] \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\sum_k [H_{mk}\rho_{kn} - \rho_{mk}H_{kn}]
\end{aligned} \tag{1.60}$$

对于混合系综，密度矩阵的动力学方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_i P_i \left[\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t}\langle\Psi| - |\Psi\rangle \frac{\partial\langle\Psi|}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\sum_i P_i \left[\hat{H}|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{H}\right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho] \tag{1.59a}$$

下面将密度矩阵用于光与二能级原子系统，可以得到光学的布洛赫方程，它是半经典量子光学的基本方程。

对二能级原子与光场作用系统的哈密顿量

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

H_0 是原子哈密顿量，光场与原子相互作用取偶极近似 $V = -e\vec{r}\cdot\vec{E}$，将密度矩阵元的动力学方程(1.60)式用于此系统，并考虑到

$$V_{aa} = 0 \qquad V_{bb} = 0 \qquad (H_0)_{ab} = 0$$

$$H_{aa} = (H_0)_{aa} + V_{aa} = \hbar\omega_a \qquad H_{bb} = \hbar\omega_b$$

$$H_{ab} = (H_0)_{ab} + V_{ab} = V_{ab} \qquad H_{ba} = V_{ba} = V_{ab}^*$$

得到

$$\frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[(H_{aa}\rho_{aa} + H_{ab}\rho_{ba}) - (\rho_{aa}H_{aa} + \rho_{ab}H_{ba})]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}[V_{ab}\rho_{ba} - V_{ba}\rho_{ab}] \tag{1.60 a}$$

同理

$$\frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar}[V_{ab}\rho_{ba} - V_{ba}\rho_{ab}] \tag{1.60 b}$$

$$\frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[(H_{aa}\rho_{ab} + H_{ab}\rho_{bb}) - (\rho_{aa}H_{ab} + \rho_{ab}H_{bb})]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}[(\hbar\omega_a - \hbar\omega_b)\rho_{ab} + V_{ab}\rho_{bb} - V_{ab}\rho_{aa}]$$

$$= -i\omega_{ab}\rho_{ab} + \frac{1}{i\hbar}V_{ab}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \tag{1.60 c}$$

类似的方程布洛赫在讨论核磁共振时给出过，因此方程(1.60)式称为没有考虑原子状态衰减时的光学布洛赫方程。

若进一步考虑原子上下能态的衰减，分别取衰减系数为 γ_a 与

γ_b，方程(1.60a,b)改写为

$$\frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t}=-\gamma_a\rho_{aa}-\frac{1}{i\hbar}[V_{ab}\rho_{ba}-V_{ba}\rho_{ab}] \tag{1.61 a}$$

$$\frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t}=-\gamma_b\rho_{bb}-\frac{1}{i\hbar}[V_{ab}\rho_{ba}-V_{ba}\rho_{ab}] \tag{1.61 b}$$

能态的衰减自然对二能态之间跃迁几率带来影响，导致辐射谱线的加宽，另外原子碰撞也会引起谱线加宽，其总的作用引入衰减常数 γ，与谱线半宽度有关，方程(1.60c)改写为

$$\frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t}=-(i\omega_{ab}+\gamma)\rho_{ab}+\frac{i}{\hbar}V_{ab}(\rho_{aa}-\rho_{bb}) \tag{1.61 c}$$

以上是考虑二能态都衰变。在有些情况下，如红宝石激光器，是从激发态跃迁到基态，基态是稳定的，这时衰减常数只有一个，可以取为 Γ，动力学方程(1.61)式改成

$$\frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t}=-\frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t}=\Gamma\rho_{aa}+\frac{i}{\hbar}[V_{ab}\rho_{ba}-V_{ba}\rho_{ab}] \tag{1.62}$$

4. 密度矩阵的矢量模型

将密度矩阵元满足的布洛赫方程写成矢量形式，并给出它的几何图像，这可使物理图像更清晰，另外通过与核磁共振现象类比，有利于研究与核磁共振相似的光学现象，如拉比振荡与光子回声等。

引入实函数

$$U=\rho_{ab}e^{i\omega t}+\rho_{ab}^{*}e^{-i\omega t} \tag{1.63 a}$$

$$V=i\rho_{ab}e^{i\omega t}-i\rho_{ab}^{*}e^{-i\omega t} \tag{1.63 b}$$

$$W=\rho_{aa}-\rho_{bb} \tag{1.63 c}$$

不难看出 U 与 V 分别为 ρ_{ab}的实部和虚部，分别代表色散和吸收，而 W 对应反转粒子数，对 U、V 和 W 求导数，利用(1.61)式，通过适当代替，可以给出核磁共振中原始布洛赫方程相似形式。

$$\frac{dU}{dt}=-\delta V-U/T_2$$

$$\frac{dV}{dt}=\delta U-V/T_2+R_0W \tag{1.64}$$
$$\frac{dW}{dt}=-(W+1)/T_1-R_0W$$

其中，$\delta=\omega_{ab}-\omega, R_0=P_E E_0/\hbar, T_2=1/\gamma, T_1=\frac{1}{2}(\frac{1}{\gamma_a}+\frac{1}{\gamma_b})$。

若 $T_1=T_2=\frac{1}{\gamma}$，在抽象三维空间 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 中引入矢量

$$\vec{U}=U\vec{e}_1+V\vec{e}_2+W\vec{e}_3$$

类似于核磁共振中的自旋矢量 $\vec{\sigma}=\sigma_x\vec{e}_1+\sigma_y\vec{e}_2+\sigma_z\vec{e}_3$，$\vec{U}$ 称为布洛赫矢量，再引入有效拉比(Rabi)进动场矢量 $\vec{R}$

$$\vec{R}=R_0\vec{e}_1-\delta\vec{e}_3$$

这样方程(1.64)式可以用矢量表示为

$$\frac{d\vec{U}}{dt}=-\gamma(\vec{U}+\vec{e}_3)+\vec{U}\times\vec{R} \tag{1.65}$$

这方程即为光学布洛赫方程的矢量形式。与经典力学中的陀螺方程类比，显示布洛赫矢量 $\vec{U}$ 在抽象空间 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 中绕 $\vec{R}$ 轴旋转，旋转角频率为

$$R=\sqrt{\delta^2+R_0^2}$$

当共振时 $\delta=0,\omega_{ab}=\omega,R=R_0,\vec{R}=\frac{P_E E_0}{\hbar}\vec{e}_1$，在 $\vec{e}_1$ 方向上，布洛赫矢量 $\vec{U}=V\vec{e}_2+W\vec{e}_3$，在 $\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_3$ 的平面内，几何图形如图 1.4(a)所示，当 $\vec{U}$ 旋转时，$\omega=\rho_{aa}-\rho_{bb}$，其值在 $+1$ 到 -1 之间变化。

非共振时

$$\vec{U}=U\vec{e}_1+V\vec{e}_2+W\vec{e}_3$$
$$\vec{R}=R_0\vec{e}_1-\delta\vec{e}_3$$

几何图形如图 1.4(b)所示，$\vec{U}$ 绕 $\vec{R}$ 转动，当初值 $W=1$，$\vec{U}$ 旋转时 W 达不到 -1 位置。

当无衰减时 $\gamma=0, T_1=T_2=\infty$，则方程(1.64)式变成

$$\frac{dU}{dt}=-\delta V$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\delta U+R_0W \tag{1.66}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-R_0V$$

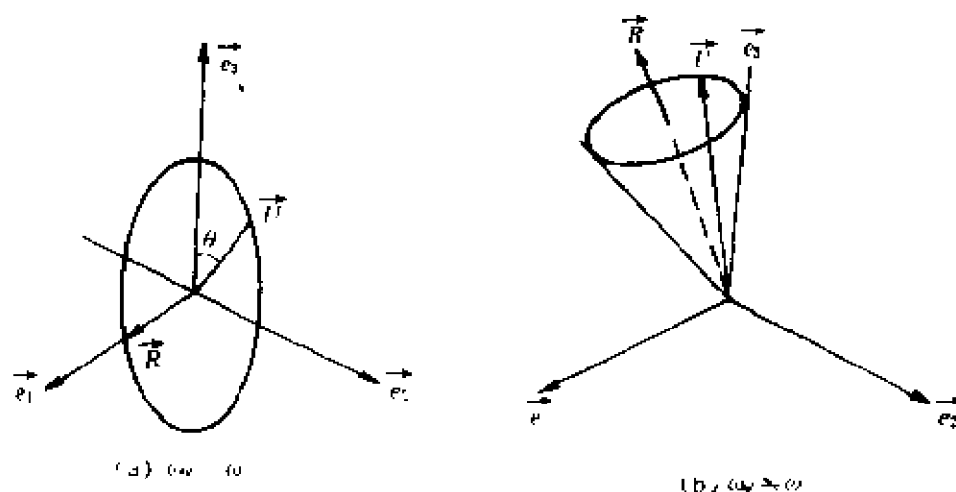


图 1.4

特别是在共振时 $\delta=0$，得到$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=0$，$U=$常量$=U(0)$

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t^2}=-R_0^2W \qquad \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}t^2}=-R_0^2V$$

具有简谐振动形式。则总解可表示为

$$\begin{bmatrix}U(t)\\V(t)\\W(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos R_0t & -\sin R_0t\\0 & \sin R_0t & \cos R_0t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U(0)\\V(0)\\W(0)\end{bmatrix} \tag{1.67}$$

当非共振时，方程(1.66)式解为

$$
\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
\dfrac{R_0^2+\delta^2\cos Rt}{R^2} & \dfrac{\delta}{R}\sin Rt & \dfrac{\delta R_0}{R^2}(1-\cos Rt) \\
-\dfrac{\delta}{R}\sin Rt & \cos Rt & \dfrac{R_0}{R}\sin Rt \\
-\dfrac{\delta R_0}{R^2}(1-\cos Rt) & -\dfrac{R_0}{R}\sin Rt & \dfrac{R_0^2\cos Rt+\delta^2}{R^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \\ W(0) \end{bmatrix}
\tag{1.68}
$$

在无衰减情况下，可以证明布洛赫矢量在旋转中保持长度不变，即

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U^2+V^2+W^2]=0 \tag{1.69}
$$

当有衰减时，$\vec{U}$ 将一边旋转，一边收缩，即反转粒子数和原子偶极矩都在减少。

下面给出光学布洛赫方程的定态解。定态条件：

$$
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0
$$

方程(1.64)式成为

$$
\begin{aligned}
&-\delta V-U/T_2=0 \\
&\delta U-V/T_2+R_0W=0 \\
&-(W+1)/T_1-R_0V=0
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

由代数方程组(1.70)式解出

$$
W=\frac{-(1+\delta^2T_2^2)}{1+\delta^2T_2^2+R_0^2T_1T_2}
$$

$$
V=\frac{-R_0T_2}{1+\delta^2T_2^2+R_0^2T_1T_2}
$$

$$
U=\frac{\delta R_0T_2^2}{1+\delta^2T_2^2+R_0^2T_1T_2}
$$

显然共振时 $\omega_{ab}=\omega,\delta=0,U=0$ 即色散为零，而吸收或增益最大。

习　　题

1.1 设 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 为矢量算符，试证明

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

1.2 若 $\vec{r},\vec{p}$ 为位置与动量算符，轨道角动量算符 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$，证明：

$$\vec{r}\cdot\vec{L}=0 \qquad \vec{p}\cdot\vec{L}=0 \qquad \vec{L}\times\vec{L}=\mathrm{i}\hbar\vec{L}$$

1.3 若算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 不对易，$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$，而 $\hat{C}$ 与 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 对易，试证明 Glauber 公式：

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\hat{C}}=\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\hat{C}}$$

提示：引入函数 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}$，对 λ 求导数，利用 $\hat{A}\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}=\mathrm{e}^{\lambda\hat{B}}(\hat{A}+\lambda\hat{C})$ 再对 λ 积分，最后取 $\lambda=1$。

1.4 谐振子哈密顿算符 $\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{p}^2+\frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2$，引入算符

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q}+\mathrm{i}\hat{p}) \qquad \hat{a}^+=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q}-\mathrm{i}\hat{p})$$

若 $[\hat{q},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar$，证明

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=1$$

$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})$$

1.5 若 $|n\rangle$ 是谐振子能量 E_n 的本征态，即

$$\hat{H}|n\rangle=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$$

证明

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle \qquad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad |n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$$

1.6 对于一维谐振子，证明湮灭算符 $\hat{a}$ 的本征态 $\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$|\alpha\rangle$称为谐振子的相干态。

1.7 有一量子力学系统具有一系列状态，相应能量 E_n 的状态 $\Psi_n(n=0,1,2,\cdots)$，当 $t=0$ 时系统处在基态 Ψ_0，$t\geqslant0$ 时受到微扰 $V(t)=V_0e^{-t/\tau}$，试用一级微扰论计算出 $t\gg\tau$ 时系统处在 Ψ_n 态的几率。

1.8 从初始条件 $C_a(0)=1$ 和 $C_b(0)=0$ 出发解方程

$$\frac{\partial C_a}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}(-\delta C_a+R_0C_b)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}(\delta C_b+R_0C_a)$$

求解到电偶极相互作用的二级近似。

1.9 三能级运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}R_0C_2$$

$$\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}R_0(C_1+C_3)$$

$$\frac{\mathrm{d}C_3}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\mathrm{i}R_0C_2$$

画出能级图并写出它的一般解。

1.10 考虑二能级原子系统，它 30%处在状态

$$\Psi_1=2^{-1/2}(U_ae^{-\mathrm{i}\omega_at}+U_be^{-\mathrm{i}\omega_bt})$$

50%处在状态　　$\Psi_2=10^{-1/2}(U_ae^{-\mathrm{i}\omega_at}-3U_be^{-\mathrm{i}\omega_bt})$

20%处在状态　　$\Psi_3=U_be^{-\mathrm{i}\omega_bt}$

求以本征函数 U_a 与 U_b 为基时系统的密度矩阵。

1.11 若布洛赫矢量分量定义为

$U=C_aC_b^*+C_a^*C_b$

$V=\mathrm{i}C_aC_b^*-\mathrm{i}C_a^*C_b$

$W=C_a^2-C_b^2$

其中，C_a 与 C_b 满足方程

$$\frac{dC_a}{dt} = -\frac{1}{2}(\gamma_a + i\delta)C_a + \frac{1}{2}iR_0C_b$$

$$\frac{dC_b}{dt} = -\frac{1}{2}(\gamma_b - i\delta)C_b + \frac{1}{2}iR_0C_a$$

试推出$\frac{dU}{dt}$与$\frac{dV}{dt}$满足的方程,给出相应的 T_2 值。

1.12 试证明在无衰减时,布洛赫矢量在旋转中保持长度不变,即

$$\frac{d}{dt}[U^2 + V^2 + W^2] = 0$$

参考文献

[1] 曾谨言．量子力学．科学出版社，1981.

[2] 余寿绵．高等量子力学．山东科学技术出版社，1985.

[3] 李福利．高等激光物理学．中国科学技术大学出版社，1992.

[4] P. Meystre, M. Sargent. Elements of Quantum Optics, Springer Verlay, Berlin, 1990.

[5] Osamu Mirota(ed). Squeezed Light. Elsevier, Amsterdam, 1992.

第二章　激光的半经典理论

上一章根据量子光学的需要介绍了量子力学的基本概念。考虑到工科大学的激光物理课程中一般仅介绍激光的速率方程理论，因此作为量子力学知识应用实例，这章讨论在量子光学发展中起关键作用的激光半经典理论。激光(Laser)是辐射受激发射的光放大的缩写。光的受激辐射和自发辐射都是典型的量子力学过程。因此激光理论应是一个量子理论，它应属于量子光学一个重要内容。讨论激光器理论的方法，对于量子光学其他课题的讨论也是有用的。

§2-1　激光理论概况

激光涉及辐射场与介质的相互作用，一个完全的量子理论应建立在电磁场和原子分子同时量子化的基础之上的。一个完全的量子激光理论的框架图如图 2.1 所示。

原则上说，激光的所有问题都可以用全量子理论来处理，但使用中常很复杂。对大多数问题完全可以用简化的半经典理论，甚至经典的速率方程理论来处理。图 2.2 给出理论简化的过程和每种理论适宜解决的问题，N. Haken 的专著《Laser Theory》就是按图 2.2 的框图系统进行讲述的。这种理论系统作为专著是较全面的，作教材并不太适宜。

在国内大学激光物理教学中，一般只介绍激光的速率方程理论。该理论的出发点是在某些量子概念基础上，用经典统计方法引进光子数方程和反转粒子数方程，在这些方程的基础上讨论激

光稳态运转中的某些特性。

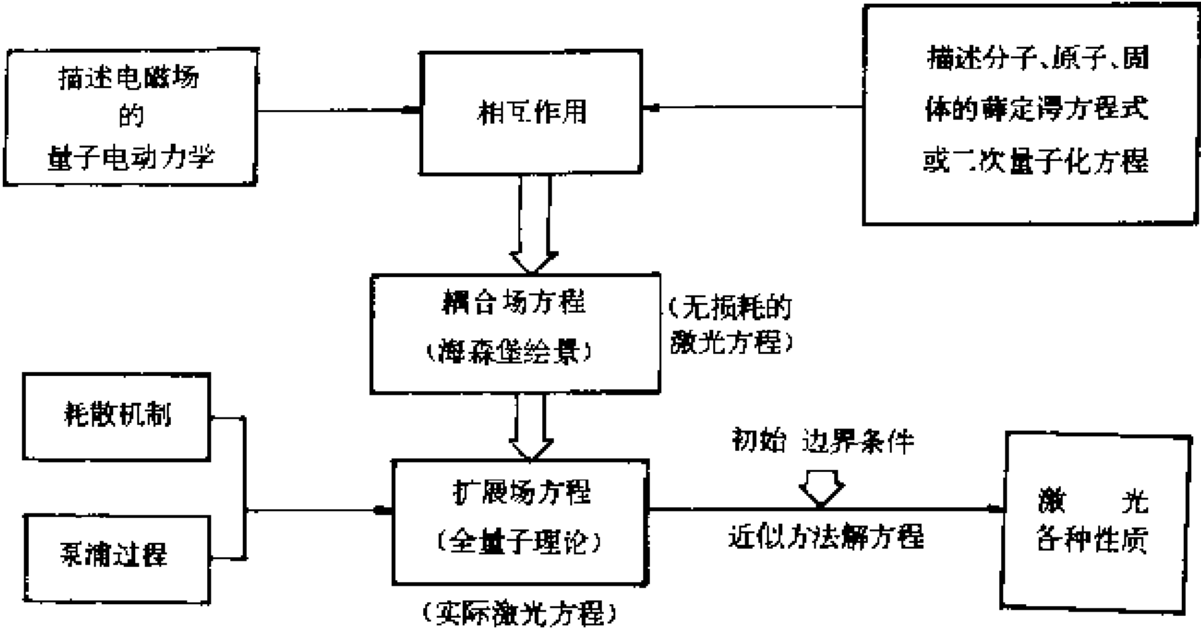


图 2.1

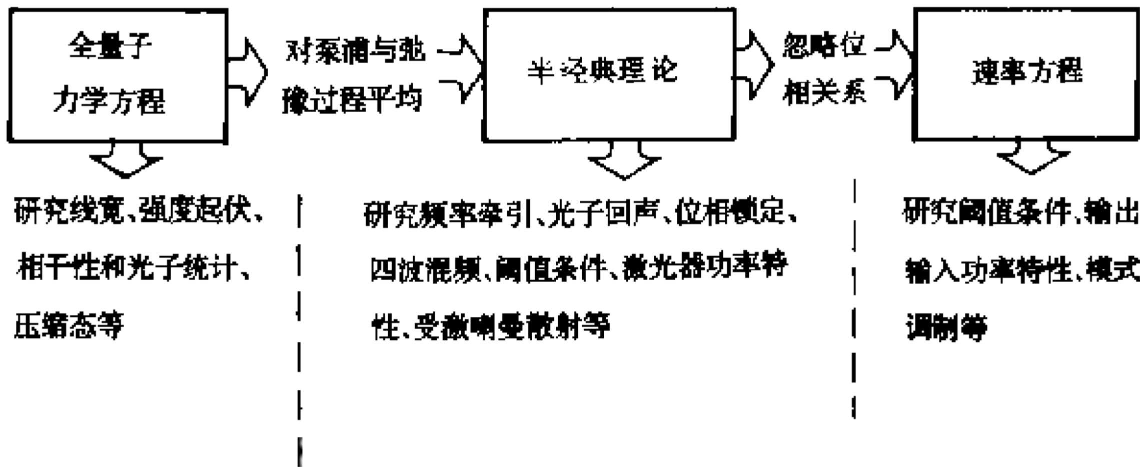


图 2.2

半经典理论将辐射场视为满足麦克斯韦方程组的经典电磁场，而将工作物质中原子和分子视为服从量子力学规律的微观粒子，激光与介质的作用用量子力学微扰论来处理。目前流行的半经典理论有两个学派：

一是哈肯（Haken）的半经典理论，理论的出发点是哈肯的三个激光方程：

λ 模光场的振幅方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_\lambda^* = (\mathrm{i}\Omega_\lambda - k_\lambda)a_\lambda^* + \mathrm{i}\sum_\mu g_{\mu\lambda}^* \rho_{12\mu} \tag{2.1}$$

其中 Ω_λ 为谐振腔的模频率，k_λ 为腔衰减系数，$g_{\mu\lambda}$ 为 μ 个原子与 λ 模光场的耦合系数，ρ_{12} 为二能级原子密度矩阵元，它的变化满足哈肯的物质方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{12\mu} = (\mathrm{i}\gamma_{21\mu} - \gamma_{21})\rho_{12\mu} - \mathrm{i}\sum_\lambda g_{\mu,\lambda}a_\lambda^*(\rho_{22} - \rho_{11})_\mu$$

其中 $\gamma_{21\mu}$ 为 μ 原子跃迁频率，γ_{21} 为原子偶极矩衰减系数，取反转粒子数 $D_\mu = (\rho_{22} - \rho_{11})\mu$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_\mu = -\gamma(D_\mu - D_0) + 2\mathrm{i}\left(\sum_\lambda \rho_{\mu\lambda}a_\lambda^* \rho_{21\mu} - \sum_\lambda \rho_{21\mu}^* g_{\mu\lambda}^* a_\lambda\right)$$

式中，D_0 是没有相干光作用时的反转粒子数，γ 为反转粒子数衰减系数，右边第一项代表弛豫过程，第二项反映光场与原子的相互作用，λ 求和表示多模光场共同作用。

哈肯理论就是从以上三个方程出发，在一定近似条件下求解，可以从该解讨论激光的一些性质。若采用慢变化振幅近似，并取激光频率和腔的模频相等 $\Omega_\lambda = \omega_\lambda$，并对不同模位相求平均，就可以从哈肯方程推出激光的速率方程，从而可以给出速率方程的近似条件。

半经典理论的另一学派是兰姆(Lamb)的半经典激光理论。该理论的处理方法是从经典的介质中的电磁场的波动方程出发，通过适当的近似给出激光电场的振幅和频率所满足的方程。该方程中辐射源是激光电场感生的激光物质的宏观电极化强度，因此它是一组自洽场方程。理论计算的中心是激光物质中的宏观电极化强度，采用的方法是量子统计中密度矩阵的方法，利用密度矩阵满足的布洛赫方程。此理论可以解释激光器的增益饱和、频率牵引、模式竞争、位相锁定、兰姆凹陷等问题。本章第二节引出兰姆自洽场方程，后面三节分别用兰姆自洽场方程去处理固体、气体和半导

体激光器中的问题。

§2-2 激光的自洽场方程

1. 介质中的场方程

从麦克斯韦方程组出发，利用均匀介质的物质方程给出

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}+\nabla(\nabla\cdot\vec{E})$$
$$=(\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2})-\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}\tag{2.2}$$

考虑介质均匀时可以取$\nabla\cdot\vec{E}=0$，方程可写成

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\sigma\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}\tag{2.3}$$

其中$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$为真空中光速，若谐振腔是轴对称的，腔轴在$z$方向，垂直于腔轴方向变化暂不考虑，只考虑$z$方向变化，方程(2.3)式可改写为：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\tag{2.4}$$

这是z向传送的波动方程，右边第一项是损耗项，右边第三项为源头，取决于介质宏观电极化强度P的变化。

在量子光学中，常将电场分为“正频”与“负频”两部分

$$E(z,t)=E^+(z,t)+E^-(z,t)$$

为简单起见，我们先考虑单色光，其电场为

$$E^+(z,t)=\frac{1}{2}\hat{x}E_0(z,t)e^{i(kz-\omega t+\Phi(z,t))}\tag{2.5}$$

其中$\hat{x}$为偏振方向，$E_0(z,t)$为慢变化的实振幅，若$E(z,t)$完全单色时，位相Φ在时空中为常数；如果为准单色，$\Phi(z,t)$为时空慢变化函数，满足

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\ll\omega,\qquad\frac{\partial\Phi}{\partial z}\ll k\tag{2.6}$$

同样

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} \ll \omega E_0 \qquad \frac{\partial E_0}{\partial z} \ll k E_0$$

以上即所谓慢变化振幅与位相近似(SVAP)。这一近似在激光物理中起关键作用，在物理上意味着光波在一个周期与波长内振幅与位相初值变化很小。

在场分为正频与负频时，极化强度也分为正频与负频部分

$$P(z,t) = P^+(z,t) + P^-(z,t)$$

对于准单色场，介质极化强度为

$$P^+(z,t) = \frac{1}{2}\hat{x}P_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\varphi(z,t))}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{x}N(z)P_k X(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\Phi(z,t))}$$

其中 $N(z)$是单位体积中偶极子数，P_k 为每个偶极子的偶极矩，$X(z,t)$是复振幅

$$X(z,t) = U(z,t) - \mathrm{i}V(z,t)$$

慢变化条件是

$$\left|\frac{\partial X}{\partial t}\right| \ll \omega|X| \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial t}\right| \ll \omega|U| \qquad \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| \ll \omega|V|$$

慢变化近似相当于在方程中$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$、$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$、$\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$和$\frac{\partial x}{\partial t}$项均可以忽略不计，在这近似下场方程(2.4)式可以简化为

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{k}{2\varepsilon_0}\mathrm{Im}(P_0) = \frac{k}{2\varepsilon_0}N(z)P_k V \qquad (2.7a)$$

$$E_0\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\frac{k}{2\varepsilon_0}\mathrm{Re}(P_0) = -\frac{k}{2\varepsilon_0}N(z)P_k U \qquad (2.7b)$$

这两个方程在量子光学中起核心作用，从方程中可以看出作为源头的介质极化强度的作用，它的虚部决定着场振幅变化，它的实部决定波传播的相速度，它将引入色散和自聚焦效应。

2. 兰姆自洽场方程

一般激光谐振腔的电磁场并非前面引入的单色平面波，兰姆将它取为平面波叠加

$$E(z,t)=\frac{1}{2}\sum_{n}E_{n0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_n t+\Phi_n)]U_n(z)+c.c. \tag{2.8}$$

式中 $C.C$ 表示为第一项的复共轭。

其中模式振幅 $E_{n0}(t)$和位相 $\Phi_n(t)$，在一个场周期中变化很小，$U_n(z)$确定模式在轴向变化，对两面反射镜的激光，取驻波形式

$$U_n(z)=\sin(k_n z)\qquad k_n=n\pi/L$$

而对环形激光取行波形式

$$U_n(z)=\exp(\mathrm{i}k'_n z)\qquad k'_n=2\pi n/L$$

ω_n 为激光模式频率。这时介质的极化强度相应为平面波叠加

$$P(z,t)=\frac{1}{2}\sum_{n}P_{n0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_n t+\Phi_n)]U_n(z)+c.c. \tag{2.9}$$

极化强度振幅满足慢变化条件，若将(2.8)与(2.9)式代入波动方程(2.4)式，利用慢变化条件，忽略 $E_{n0}(t)$和 $\Phi_n(t)$的二阶导数项和 $P_{n0}(t)$的一阶导数项，则 $P_{n0}(t)$的实部和虚部可以得到以下两个方程：

$$\begin{aligned}&\left[\Omega_n^2-\left(\omega_n+\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}\right)^2\right]E_{n0}(t)+\frac{\omega}{Q_n}\frac{\partial E_{n0}(t)}{\partial t}=\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}(\mathrm{Re}(P_{n0}(t))\\&-\frac{\omega}{Q_n}(\omega_n+\frac{\partial\Phi_n}{\partial t})E_{n0}(t)-2\omega_n\frac{\partial E_{n0}(t)}{\partial t}=\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}(\mathrm{Im}(P_{n0}(t))\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 Q_n 为腔的第 n 个模品质因数，它定义为第 n 个模储能与每弧度能量损失之比。Ω_n 为腔的第 n 个模式的共振频率，在有损耗时，Ω_n 与 ω_n 并不完全相同。若进一步忽略$\frac{\omega}{Q_n}\frac{\partial E_{n0}}{\partial t}$和$\frac{\omega}{Q_n}\frac{\partial\Phi_n(t)}{\partial t}$项，近似取

$\omega=\frac{1}{2}(\omega_n+\Omega_n)$，(2.10)式可简化为

$$\frac{\partial E_{n0}(t)}{\partial t}=-\frac{\omega_n}{2Q_n}E_{n0}(t)-\frac{\omega_n}{2\varepsilon_0}\mathrm{Im}(P_{n0}) \tag{2.11a}$$

$$\omega_n+\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}=\Omega_n-\frac{\omega_n}{2\varepsilon_0}\mathrm{Re}(P_{n0})/E_{n0} \tag{2.11b}$$

这就是半经典激光理论中的拉姆(Lamb)自洽场方程。从(2.11a)式看出激光振幅变化取决于介质极化强度的虚部变化，而(2.11b)式反映了激光的频率特性。当介质极化强度的实部具有一定的数值时，激光的振荡频率与腔的共振频率 Ω_n 可能取不同的值，这即所谓频率牵引效应。为了给出激光的频率和振幅，必须知道宏观电极化强度振幅 $P_{n0}(t)$的实部和虚部的具体形式。后面几节，我们将对不同的激光介质，通过密度矩阵的动力学方程给出相应 $P_{n0}(t)$的具体表示式。

为了进一步理解兰姆自洽场方程的物理意义，考虑一种特殊情况，即介质的电极化强度与电场强度成线性关系。

$$P_{n0}=\varepsilon_0\chi_n E_{n0}=\varepsilon_0(\chi'_n+\mathrm{i}\chi''_n)E_{n0} \tag{2.12}$$

将(2.12)式代入方程(2.11)式，得到

$$\frac{\partial E_{n0}}{\partial t}=-\frac{\omega}{2Q_n}E_{n0}-\frac{\omega_0}{2}\chi''_n E_{n0} \tag{2.13a}$$

$$\omega_n+\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}=\Omega_n-\frac{\omega_n}{2}\chi'_n \tag{2.13b}$$

方程(2.13a)反映能量守恒，模式能量 h_n 正比于 E_{n0}^2。从(2.13a)也可得到能量方程

$$\frac{\mathrm{d}h_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{Q_n}h_n-\omega\chi''_n h_n \tag{2.14}$$

一般 $\chi''_n<0$，右边第一项是腔损失，第二项为正值，是介质的增益，当 $|\chi''_n|>\frac{1}{Q_n}$能量增加，表现为放大；$|\chi''_n|<\frac{1}{Q_n}$能量减少，表现为吸收。若取 $\mathrm{d}\Phi_n/\mathrm{d}t=0$，从(2.13b)得

$$\omega_n = \Omega_n - \frac{\omega}{2}\chi_n \quad (2.15)$$

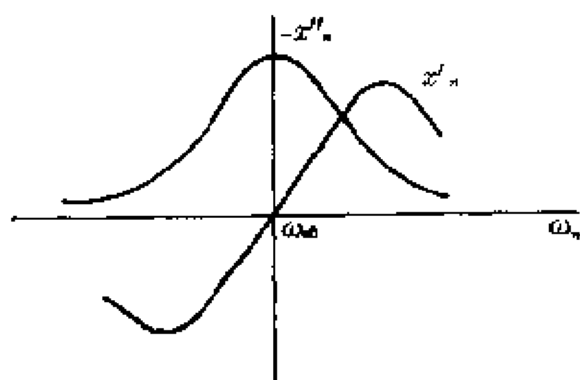


图 2.3

表明第 n 个模的激光振荡频率相对腔的共振频率 Ω_n，有 $-\frac{\omega}{2}\chi_n$ 的牵引量。

对于均匀加宽介质复极化率的实部 χ_n 和虚部 $-\chi''_n$ 与激光频率 ω_n 的关系如图2.3所示。

§2-3 固体激光器的兰姆理论

上节已引出兰姆自洽场方程，从方程中看出要得到激光的能量和频率，必须求出宏观电极化强度，在兰姆理论中宏观电极化强度是通过密度矩阵来计算的。本节先建立宏观电极化强度与密度矩阵的关系，然后在固体激光器条件下近似求解布洛赫方程，求出宏观电极化强度的实部与虚部，从而通过兰姆自洽场方程讨论固体激光器的特性。

1. 宏观电极化强度与密度矩阵的关系

工作介质的宏观电极化强度是介质单位体积内原子感应电偶极矩之和，若 $\hat{P}$ 为原子的电偶极矩算符，则感应电偶极矩的期望值为

$$P = \int \Psi^*(\vec{r},t)\hat{P}\Psi(\vec{r},t)\mathrm{d}^3r \quad (2.16)$$

在二能级原子模型中

$$\Psi(\vec{r},t) = C_a(t)u_a(\vec{r})e^{-i\omega_a t} + C_b(t)u_b(\vec{r})e^{-i\omega_b t} \quad (2.17)$$

将(2.17)式代入(2.16)式，考虑 $\hat{P}$ 有奇宇称，则同一能级间矩阵元为 0，得到

$$p = p_E(\rho_{ab} + \rho_{ba})$$

其中

$$p_E = \int \mathrm{d}^3 r u_a^*(\vec{r}) \hat{P} u_b(\vec{r})$$

$$\rho_{ab} = C_a(t) C_b^*(t) \qquad \rho_{ba} = C_b(t) C_a^*(t)$$

是密度矩阵的非对角矩阵元。设单位体积中原子数为 n，则介质的宏观电极化强度在二能级原子模型中为

$$P = np = np_E(\rho_{ab} + \rho_{ba}) \tag{2.18}$$

通过解光学的布洛赫方程(1.61)式求出 ρ_{ab} 与 ρ_{ba}。利用(2.18)式可得到宏观电极化强度 P，将 P 代入兰姆自洽场方程，就可以求出激光的能量和频率的性质。

2. 布居数矩阵的动力学方程

原子的密度矩阵与单位体积内原子数的乘积，称为介质的布居数矩阵，为简洁起见，布居数矩阵在二能级原子模型中表示为

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

这时每个矩阵元的物理意义已不同于密度矩阵，ρ_{aa} 为在状态 a 的原子数

$$N = \rho_{aa} - \rho_{bb}$$

是上能级原子数与下能级原子数之差，为反转的粒子数。矩阵元随时间变化应满足光学的布洛赫方程。方程(1.61)式没考虑泵浦源的作用，考虑泵浦源后，方程(1.61)式中应加入泵浦源的激发速率 λ，则方程(1.61)式改写成

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\rho_{ab}}{\mathrm{d}t}&=-(\mathrm{i}\omega_{ab}-\gamma)\rho_{ab}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})P_{E}E(z,t)\\
\frac{\mathrm{d}\rho_{aa}}{\mathrm{d}t}&=\lambda_{a}-\gamma_{a}\rho_{aa}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{ba}-\rho_{ab})P_{b}E(z,t)\\
\frac{\mathrm{d}\rho_{bb}}{\mathrm{d}t}&=\lambda_{b}-\gamma_{b}\rho_{bb}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\rho_{ba}-\rho_{ab})P_{E}E(z,t)
\end{aligned}\right\}\tag{2.20}
$$

方程中各项物理意义是清楚的，如$\frac{\mathrm{d}\rho_{bb}}{\mathrm{d}t}$方程中，$\lambda_b$ 是由于泵浦引起处在能态 b 原子数的增加率，右边第二项是由自发辐射或其他过程使状态在能态 b 原子数目的衰减率，而最后一项是由于受激辐射使状态在能态 b 的原子数的增加率。

3. 布居数矩阵方程的近似解

为简单起见，讨论单模运转的情况时，取第 n 个模式，且场形式为

$$
E(z,t)=\frac{1}{2}E_{n0}(t)\exp\mathrm{i}(k_n z-\omega_n t+\Phi_n(z,t))\tag{2.21}
$$

其中，$E_{n0}(t)$和 $\Phi_n(z,t)$均为慢变化的。考虑一级近似时，近似取二能级上的粒子数差与时间无关。

$$
\rho_{aa}-\rho_{bb}=N(z)\tag{2.22}
$$

(2.20)式中第一式忽略相互作用项，其解为

$$
\rho_{ab}=\rho_{ab}^{(0)}(t)\exp[-(i\omega_{ab}+\gamma)t]\tag{2.23}
$$

将(2.23)式代入(2.20)式，得到

$$
\frac{\mathrm{d}\rho_{ab}^{(0)}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\rho_{aa}-\rho_{bb})P_{b}E_{on}(t)\exp[\mathrm{i}(k_n z+\Phi(z,t))]
$$

$$
\cdot\exp[\mathrm{i}(\omega_{ab}-\omega_n)+\gamma]t\tag{2.24}
$$

由于 $E_n(t)$和 $\Phi_n(z,t)$是慢变化函数，可视为常数，从(2.24)式中解出 $\rho_{ab}^{(0)}$，再代入(2.23)式中，得到

$$
\rho_{ab}=\frac{N(z)P_{E}E_{n0}(t)}{2\hbar[(\omega_n-\omega_{ab})+\mathrm{i}\gamma]}\exp[\mathrm{i}k_n z-\mathrm{i}\omega_n t+\mathrm{i}\Phi_n(z,t)]\tag{2.25}
$$

利用 $\rho_{ba}=\rho_{ab}^*$ 可以给出 ρ_{ba}，将 ρ_{ab} 与 ρ_{ba} 代入(2.18)式中，可以求出 P_{n1} 并得到它的慢变化振幅 P_{no} 为

$$P_{no}=-\frac{P_{g}^{2}NE_{no}(t)}{\hbar}\frac{(\omega_{ab}-\omega_{n})+i\gamma}{(\omega_{ab}-\omega_{n})^{2}+\gamma^{2}} \tag{2.26}$$

当 $(\omega_{ab}-\omega_{n})\ll\gamma$ 时，上式近似给出

$$P_{no}=-\frac{P_{g}^{2}NE_{no}(t)}{\hbar\gamma^{2}}[(\omega_{ab}-\omega_{n})+i\gamma] \tag{2.26a}$$

将(2.26a)的虚部代入(2.11a)式，得到

$$\frac{dE_{no}(t)}{dt}=\omega_{n}\left[\frac{P_{g}^{2}N}{2\varepsilon_{0}\hbar\gamma}-\frac{1}{2Q_{n}}\right]E_{no}(t) \tag{2.27}$$

欲要产生激光，就要求上式右边方括号内大于零。即

$$\frac{P_{g}^{2}N}{\varepsilon_{0}\hbar\gamma}\geqslant\frac{1}{Q_{n}} \tag{2.28}$$

等号表示激光器的阈值条件，这时反转原子数

$$N=\frac{\varepsilon_{0}\hbar\gamma}{P_{g}^{2}Q_{n}} \tag{2.29}$$

将(2.26a)的实部代入(2.11b)式，得到

$$\omega_{n}+\frac{d\Phi_{n}}{dt}-\Omega_{n}=\frac{P_{g}^{2}N\omega_{n}}{2\varepsilon_{0}\hbar\gamma^{2}}(\omega_{ab}-\omega_{n})$$

略去 $\frac{d\Phi_{n}}{dt}$，利用(2.29)式，得到

$$\omega_{n}-\Omega_{n}=\frac{\omega_{n}}{2Q_{n}\gamma}(\omega_{ab}-\omega_{n}) \tag{2.30}$$

上式给出激光器振荡频率、谐振腔共振频率 Ω_n 和原子谱线的中心频率 ω_{ab} 之间关系，式子表明振荡频率 ω_n 和共振频率 Ω_n 总向中心频率 ω_{ab} 靠近，这就是激光器的频率牵引现象。

上面讨论中，假定反转原子数 N 是常数，结果仅适用于阈值振荡情况。在阈值以上时，从(2.27)式看出激光的振幅将按指数无限增长，但实际情况不会这样，因当激光场强增加时，a 能态原子数减少，b 能态原子数增加，反转粒子数已不再为常数，为此必须

考虑高一级的近似。

4. 激光的增益饱和效应

为了研究激光器在阈值以上工作的特性，必须考虑受激辐射对不同能态上原子数目的影响，为此，将 ρ_{ab}的近似解(2.25)式代入(2.20)式的后两个方程。略去高频因子可以得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho_{aa}}{dt}&=\lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-\frac{P_E^2E_{n0}{}^2(t)}{2\hbar^2}\frac{\gamma(\rho_{aa}-\rho_{bb})}{(\omega_n-\omega_{ab})^2+\gamma^2}\exp(i2k_nz)\\\frac{d\rho_{bb}}{dt}&=\lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+\frac{P_E^2E_{n0}{}^2(t)}{2\hbar^2}\frac{\gamma(\rho_{aa}-\rho_{bb})}{(\omega_n-\omega_{ab})^2+\gamma^2}\exp(i2k_nz)\end{aligned}\right\}\tag{2.31}$$

在慢变化近似下，取$\frac{d\rho_{aa}}{dt}=\frac{d\rho_{bb}}{dt}=0$，将上两式相减并进行适当处理，得到

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b}{1-\dfrac{\gamma^2P_E^2E_{n0}^2(t)\exp(i2k_nz)}{\gamma_a\gamma_b\hbar^2[(\omega_n-\omega_{ab})^2+\gamma^2]}}\tag{2.32}$$

令

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{1}{2}\left(\frac{P_EE_{n0}(t)}{\hbar}\right)^2\frac{\gamma}{(\omega_n-\omega_{ab})^2+\gamma^2}\exp(i2k_nz)\\R_s&=\frac{\gamma_a\gamma_b}{2\gamma}\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

方程(2.31)成为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho_{aa}}{dt}&=\lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-R(\rho_{aa}-\rho_{bb})\\\frac{d\rho_{bb}}{dt}&=\lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+R(\rho_{aa}-\rho_{bb})\end{aligned}\right\}\tag{2.34}$$

这就是激光系统的速率方程式，R 为受激辐射的速率参数，R_S 为饱和参数。利用(2.33)式，方程(2.32)式表示为

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b}{1+R/R_s}\tag{2.35}$$

由此看出，当激光强度 $E_{n0}^2(t)$增加时，则由于 R 增加而使 $\rho_{aa}-\rho_{bb}$

（即反转粒子数）减少，增益下降，显示出激光增益饱和效应。

将(2.35)式代入(2.24)式，求出 ρ_{ab}，再求出宏观电极化强度的振幅为

$$P_{no}=-\frac{P_{B}^{2}E_{no}(t)}{\hbar}\frac{D_0}{1+R/R_S}\frac{(\omega_{ab}-\omega_n)+\mathrm{i}\gamma}{(\omega_{ab}-\omega_n)^2+\gamma^2} \tag{2.36}$$

其中

$$D_0=n\left(\frac{\lambda_a}{\gamma_a}-\frac{\lambda_b}{\gamma_b}\right) \tag{2.37}$$

激光强度取决于 P_{no} 的虚部，当 $\omega_{ab}=\omega_n$ 时，P_{no} 出现极小值，使强度减少，出现所谓的凹陷效应。

§2-4 气体激光器

气体激光器与固体激光器不同点在于激光介质分子和原子在不断的运动，由于多普勒效应导致谱线的非均匀加宽，一般多普勒宽度大于原子谱线的自然宽度。另外，由于增益饱和效应使激光器产生光强随频率分布，在 $\omega_n=\omega_{ab}$ 时有极小值，称为兰姆凹陷。本节先定性介绍有关现象，然后介绍兰姆的半经典理论。

1. 非均匀加宽与兰姆凹陷

一个禁止原子产生辐射的中心频率为 ν_0，原子在轴向运动速度分量为 v，则运动前方接受到光的频率，由多普勒效应为

$$\nu=\nu_0\left(1+\frac{v}{C}\right)$$

所以

$$v=C\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)$$

当热平衡时，气体分子服从麦克斯韦速度分布律。仅考虑轴向时有

$$\omega(v)=\frac{1}{u\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-v^2/u^2}=\frac{1}{u\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{u^2}\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)^2}$$

其中 $u=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$ 为原子最可几速率，则测到光强随频率的分布为

$$I=I_0\exp\left[-\frac{c^2}{u^2}\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)^2\right] \tag{2.38}$$

它将是在 ν_0 附近的一个高斯型分布，谱线加宽的半高度宽度为

$$\Delta\nu_D=2\nu_0\left(\frac{2kT\ln2}{mc^2}\right)^{1/2}=2\nu_0\left(\frac{2kT\ln2}{mc^2}\right)^{1/2}$$

$$=7.16\times10^{-7}\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{2.39}$$

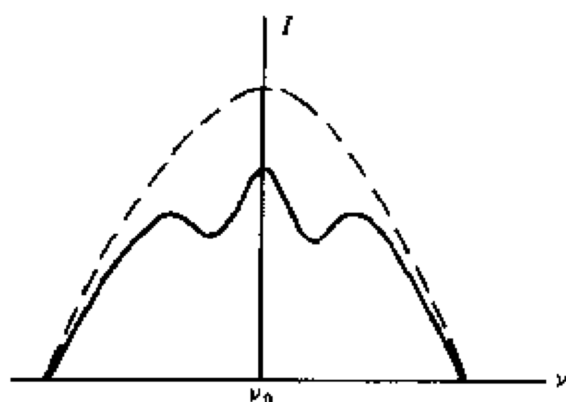


图2.4

其中，T 是绝对温度，m 为原子质量。显然这宽度远大于原子光谱的自然线宽 $\Delta\nu_N$。则对发一定光波的原子，由于速度不同，测到的频率有一个分布。这分布为高斯型分布。反过来在 ν_0 附近，有一频率为 ν_s 的光射入原子系统后，也只有特定速度的一组原子方可能与该光束共振，出现共振吸收或光放大。对其他原子几乎没有作用，在增益饱和曲线上，将对这特定频率出现增益饱和，并出现增益曲线的凹陷，凹陷的宽度等于原子光谱的自然线宽的 $\Delta\nu_W$。

在驻波腔的气体激光器中，光在腔内来回反射，对速度为 v 的原子，光可以是顺着也可以是逆着，则发生共振频率可以是

$$\nu=\nu_0(1\pm v/c)$$

则凹陷将在 ν_0 两边对称分布，如图2.4所示。这现象称为增益曲线上的"频率烧孔"现象，一般烧二个孔，只有对 $v=0$ 的原子才二孔合一。这时 $\nu=\nu_0$ 发生共振。由于增益饱和，使激光光强与频率的关

系曲线上，在 $\nu=\nu_0$ 处有极小值，这种效应被称为兰姆凹陷。它首先由兰姆在理论上预言，后来为实验所证实，这一效应在激光稳频等技术中有重要应用。

2. 兰姆的半经典理论

一个比较完善的气体激光器的兰姆半经典理论，应该是在考虑气体分子原子运动后，改进光学的布洛赫方程，在一定的近似下，解改进的布洛赫方程，求出密度矩阵，再算出气体介质的电极化强度，然后代入兰姆的自洽场方程，以讨论激光的性质。这种处理方法冗长而且复杂。一种比较简单方法，是利用上节已求出的固体激光器的结果，考虑气体介质后做适当修改就可直接给出电极化强度。

考虑原子运动后，根据多谱勒效应，速度为 v 的原子、频率为 ω_n 跃迁对应的共振频率为：(ω_n+kv) 与 (ω_n-kv)，需要进行以下代换

$$\omega_n \to (\omega_n+kv), \quad (\omega_n-kv)$$

由于原子有不同速度，其分布满足

$$\omega(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}u}\exp(-(v/u)^2)$$

这样反转粒子数需要以下代换

$$D_0 \to D_0\omega(v)$$

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{D_0\omega(v)}{1+R(v)/R_S} \qquad (2.40)$$

其中

$$R(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{P_B E_{no}}{\hbar}\right)^2\left[\frac{\gamma}{(\omega_n-\omega_{ab}+kv)^2+\gamma^2}+\frac{\gamma}{(\omega_n-\omega_{ab}-kv)^2+\gamma^2}\right] \qquad (2.41)$$

相应电极化强度振幅(2.36)式改写成

$$P_{no} = -\frac{P_E^2 E_{no}}{\hbar} D_0 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(v) \frac{\mathrm{d}v}{1 + R(r)/R_s} \left[\frac{1}{(\omega_{ab} - \omega_n - kv) - \mathrm{i}\gamma} + \frac{1}{(\omega_{ab} - \omega_n + kv) - \mathrm{i}\gamma} \right]$$

(2.42)

要完成上面积分，显然是很困难的。

作为一级近似在积分中首先取 $R(r)=0$，在 $ku \gg \gamma$ 的情况下，(3.42) 式可以化为以下形式

$$P_{no}^{(1)} = -\frac{P_E^2 E_{no}}{\hbar} \frac{D_0}{ku} \exp\left[-(\omega_{ab} - \omega_n)^2/(kv)^2\right] \left[\mathrm{i}\sqrt{\pi} - 2\int_0^{\alpha} \exp x^2 \mathrm{d}x\right]$$

(2.43)

其中 $\alpha = \dfrac{\omega_n - \omega_{ab}}{ku}$ $\quad u = 2k_B T/m = 2RT/M$

将电极化强度(3.43)式代入兰姆自洽场方程

$$\frac{\mathrm{d}E_{no}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega}{2Q_n} E_{no} - \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \mathrm{Im} P_{no}^{(1)}$$

$$\omega_n + \frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}t} = \Omega_n - \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{1}{E_{no}} \mathrm{Re} P_{no}^{(1)}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}E_{no}}{\mathrm{d}t} = \left[-\frac{\omega}{2Q_n} + \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{P_E^2 D_0 \sqrt{\pi}}{\hbar ku} \exp(-(\omega_{ab} - \omega_n)^2/(ku)^2)\right] E_{no}$$

(2.44)

欲要产生激光，就要求等式右边括号内大于零。等于零则对应激光产生的阈值条件，对应阈值的反转粒子数 D_C 为

$$D_C = \frac{\varepsilon_0}{Q_n} \frac{\hbar ku}{P_E^2 \sqrt{\pi} \exp[-(\omega_{ab} - \omega_n)^2/(ku)^2]} \tag{2.45}$$

略去 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}t}$，(2.11b)式成为

$$\begin{aligned} \Omega_n - \omega_n &= \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{1}{E_{no}} \mathrm{Re} P_{no} \\ &= \frac{2\omega}{2\varepsilon_0} \frac{P_E^2}{\hbar} \frac{D_0}{ku} \exp[-(\omega_{ab} - \omega_n)^2/(ku)^2] \int_0^{\alpha} \exp x^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

当共振时 $\omega_{ab}=\omega_n$，$\alpha=\frac{\omega_n-\omega_{ab}}{ku}=0$，则 $\Omega_n=\omega_n$，即谐振腔的共振频率与激光频率相等。

3. 兰姆凹陷的理论解释

为了从理论上解释兰姆凹陷，必须考虑 P_n对 E_{n0}的非线性项，为此(2.43)式中 $R(v)$不能忽略，而取$(1+\frac{R(v)}{R_S})^{-1}=1-\frac{R(v)}{R_S}$，这样电极化强度为

$$P_{n0}(t)=P_{n0}^{(1)}(t)+P_{n0}^{(3)}(t) \tag{2.46}$$

$$P_{n0}^{(3)}=\frac{D_C^2E_{n0}}{\hbar}D_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(v)R(v)}{R_S}\left[\frac{1}{(\omega_{ab}-\omega_n-kv)-i\gamma}+\frac{1}{(\omega_{ab}-\omega_n+kv)-i\gamma}\right]dv$$

利用留数定理完成 v 复平面积分，取适当近似后可以得到

$$P_{n0}^{(3)}(t)=\frac{1}{8}i\sqrt{\pi}P_E^2\frac{D_0}{\hbar ku}E_{n0}I_n\exp[-(\omega_{ab}-\omega_n)^2/(ku)^2]$$
$$[1+\gamma\mathscr{D}\cdot(\omega_{ab}-\omega_n)] \tag{2.47}$$

其中，$I_n=\left(\frac{P_EE_{n0}}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\gamma_a\gamma_b}$，为激光强度，而

$$\mathscr{D}(\omega_{ab}-\omega_n)=\frac{1}{\gamma+i(\omega_{ab}-\omega_n)}$$

将(2.46)式代入兰姆自洽场方程得到

$$\frac{dE_{n0}}{dt}=-\frac{\omega}{2Q_n}E_{n0}\{1-\overline{D}\exp[-(\omega_{ab}-\omega_n)^2/(ku)^2]$$
$$[1-\frac{1}{8}In(1+\mathscr{L}(\omega_{ab}-\omega_n))]\} \tag{2.48}$$

其中

$$\overline{D}=\frac{2Q_n}{\omega}\frac{\sqrt{\pi}P_b^2\omega}{2\varepsilon_0\hbar ku}D_t \tag{2.48a}$$

$$\mathscr{L}(\omega_{ab}-\omega_n)=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+(\omega_{ab}-\omega_n)^2}$$

式中 $\mathscr{L}$ 为无量纲饱和波的罗仑兹量。

在稳态情况下$\frac{dE_{n0}}{dt}=0$,得到

$$I_n=8\frac{\overline{D}-\exp[(\omega_{ab}-\omega_n)^2/(ku)^2]}{\overline{D}[1+\mathscr{L}(\omega_{ab}-\omega_n)]} \tag{2.49}$$

利用$\left.\frac{d^2E_n}{d\omega_n^2}\right|_{\omega_n=\omega_{ab}}=0$得到 $\omega_n=\omega_{ab}$时光强为极小,便得到兰姆凹陷条件为

$$\overline{D}>1+2\left(\frac{\gamma}{ku}\right)^2 \tag{2.50}$$

关于气体激光器的多模问题及环形激光器等不再讨论,读者可参看有关激光的专著。

§2-5 半导体激光器理论

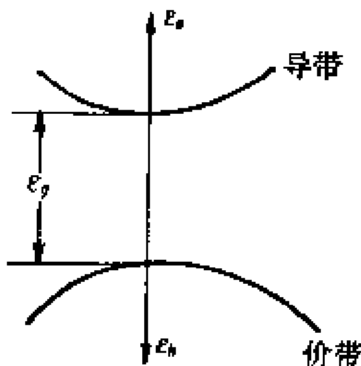


图 2.5

1. 半导体增益介质的极化强度

下面用简单有效的两带准平衡模型推导半导体介质的极化强度。模型认为导带为上能级,其内载流子是电子;价带为下能级,其载流子为空穴,两带如图2.5所示,电子与空穴能量为

$$\varepsilon_e(k)=\frac{\hbar k^2}{2m_e}+\frac{\varepsilon_g}{2}$$
$$\varepsilon_h(k)=\frac{\hbar k^2}{2m_h}+\frac{\varepsilon_g}{2} \tag{2.51}$$

其中 m_e 和 m_h 是电子和空穴的有效质量，ε_g 是零场带隙能量，对 GaAs 半导体 $\varepsilon_g=1.462\text{meV}$，$m_e=1.129\text{m}$，$m_h=8.82\text{m}$，m 为约化质量。如果一个电子在价带中吸收一个光子后被激发到导带中去，而价带中留下一个空穴，由此引起跃迁的光子能量为

$$\begin{aligned} h\nu &= \varepsilon_e+\varepsilon_h+\delta\varepsilon_g \\ &= \varepsilon+\varepsilon_g+\delta\varepsilon_g \end{aligned} \tag{2.52}$$

其中 $\varepsilon=\frac{k^2\hbar^2}{2m}$ 为约化质量能量，且 $m=\frac{m_e+m_h}{m_e m_h}$；$\delta\varepsilon_g$ 是由载流子内部库仑作用而引起能隙能量的减少，其大小随载流子密度增加而增大。

带间电子空穴有吸引作用，在低载流子密度下，电子与空穴对形成似氢原子的激子，在 GaAs 中激子的玻尔半径为124.3Å，激子的束缚能量为4.2 meV，远小于氢原子基态束缚能13.6 eV，也小于室温下的热能 $kT=25\text{meV}$。

载流子之间相互碰撞使系统达到热平衡。该平衡分布为费米分布

$$f_a(k)=\frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_a(k)-\mu_a}{\text{k}T}\right)+1} \tag{2.53}$$

其中 $\alpha=e$ 或 h，k 为玻尔兹曼常量，μ_a 是载流子的化学势。对本征半导体，电子数与空穴数相等。载流子密度为

$$N=V^{-1}\sum_k f_e(k)=V^{-1}\sum_k f_h(k) \tag{2.54}$$

介质的电极化强度 P 用密度矩阵 ρ 表示为

$$P=V^{-1}\sum_k P_E\rho_{ab}(k)+c.c \tag{2.55}$$

取 n_e 为导带中电子几率，n_h 为价带中空穴的几率。在费米分布下有

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=n_e+n_h-1 \tag{2.56}$$

这样密度矩阵的动力学方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho_{ab}(k)}{\mathrm{d}t}&=-(\mathrm{i}\omega_{ab}+\gamma)\rho_{ab}(k)+\mathrm{i}V_{ab}(n_e+n_h-1)\\ \frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t}&=\lambda_e-\gamma_{nr}n_e-\Gamma n_e n_h-\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t}\bigg|_{cc}-(\mathrm{i}V_{ab}\rho_{ba}+c.c.)\\ \frac{\mathrm{d}n_h}{\mathrm{d}t}&=\lambda_h-\gamma_{nr}n_h-\Gamma n_e n_h-\frac{\mathrm{d}n_h}{\mathrm{d}t}\bigg|_{cc}-(\mathrm{i}V_{ab}\rho_{ba}+c.c.)\end{aligned}\right\}\tag{2.57}$$

其中λ_a是由泵浦引起的载流子增加速率，a表示e或h，γ_{nr}是载流子非辐射衰减常数，Γ为辐射复合率常数，$\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t}\big|_{cc}$为载流子之间散射引起载流子的变化率，散射使分布$n_a$趋向费米分布，当达到平衡时这项贡献消失。(2.57)式中后两式求和，给出总载流子的动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda-\gamma_{nr}N-\frac{\Gamma}{V}\sum_k n_e(k)n_h(k)-\left[\frac{\mathrm{i}V_{ab}}{V}\sum_k\rho_{ba}(k)+c.c.\right]\tag{2.58}$$

其中λ是由于注入电流引起载流子密度N的增加率

$$\lambda=\eta J/ed$$

式中J为电流密度，d为作用区宽度，η是注入载流子达到作用区的效率，相互作用能矩阵元V_{ab}可由转动波近似给出

$$V_{ab}=-\frac{1}{2}P_E\varepsilon(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

假定偶极衰变率γ变化比V_{ab}快，在速率方程近似下，可解方程(2.57)第一式，得到

$$\rho_{ab}(k)=-\frac{\mathrm{i}\mathscr{D}}{2\hbar}P_E\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}d_0(k)\tag{2.59}$$

其中$\mathscr{D}=\frac{1}{\gamma-\mathrm{i}\omega}$为复罗仑兹分母，$d_0(k)$为几率差，定义为

$$d_0(k)=f_e(k)+f_h(k)-1\tag{2.60}$$

将(2.59)式代入(2.58)式得到总载流子方程为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda-\gamma_{nr}N-\frac{\Gamma}{V}\sum_k f_e(k)f_h(k)-\frac{(P_E\varepsilon\hbar)^2}{2\gamma V}\sum_k\mathscr{L}d_0(k)\tag{2.61}$$

将解出的 ρ_{ab} 代入(2.55)式，得到复极化强度为

$$P = -\frac{\mathrm{i}P_{\xi}^{2}\varepsilon}{\hbar V}\sum_{k}(\mathscr{L}d_{0}(k)) \tag{2.62}$$

要求 P 必须知道费米分布 f_{α}，其中关键是化学势 μ_{α}。对于激光必须为增益介质，要求 $d_{0}>0$，为此必须要求载流子约化质量能量 ε 满足

$$0<\varepsilon<\mu_{e}+\mu_{h}$$

表明总化学势 $\mu_{e}+\mu_{h}$ 提供一个上限。

2. 单模半导体激光器理论

最简单的半导体激光器是一个二极管，由 P 型半导体连接一个 N 型半导体形成一个 PN 结。P 型介质本身是电中性的，内掺入有受主能级的杂质，而 N 型半导体也是电中性的，掺入有施主能级的杂质，当两种介质连在一起形成 PN 结时，如果正电压从 P 到 N 加在结上，电流流动，导电电子在结点与空穴复合辐射光子，光在两端面反射，形成激光。为简单起见，假定结是由本征半导体薄层组成，忽略杂质的影响。

下面利用兰姆自洽场理论讨论半导体激光器的增益和产生激光的条件，给出它们与温度、电流、衰变率和有效质量的关系。这里仍然利用半导体准平衡模型，但复极化强度(2.62)式应做适当变化。从(2.62)式给出慢变化复极化强度为

$$P_{n} = -\frac{\mathrm{i}P_{\xi}^{2}E_{n}}{\hbar\gamma V}\sum_{k}\mathscr{L}[d_{o}-\mathrm{i}(\omega_{ab}-\omega_{n})\gamma^{-1}(f_{e}+f_{h})] \tag{2.63}$$

将上式代入兰姆自洽场方程中，可以找到激光器的场方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_{n}}{\mathrm{d}t}&=(\alpha_{rn}-\omega/2Q_{n})E_{n}\\ \omega_{n}+\frac{\mathrm{d}\Phi_{n}}{\mathrm{d}t}&=\Omega_{n}-\alpha_{in}\end{aligned} \tag{2.64}$$

其中 α_{rn} 和 α_{in} 为复饱和增益系数的实部与虚部。它们与(2.13)式中

参数 χ'_n 与 χ''_n 关系为

$$\alpha_{nr} = -\frac{\omega}{2}\chi''_n \qquad \alpha_{in} = \frac{\omega}{2}\chi'_n \tag{2.65}$$

利用(2.12)式，从复极化强度(2.63)式可以得到复饱和增益系数 α_n 为

$$\alpha_n = -\frac{\omega P_k^2}{2\varepsilon\gamma\hbar V}\sum_k \mathscr{L}[d_0(k) - \mathrm{i}(\omega_{ab} - \omega_n)\gamma^{-1}(f_e(k) + f_h(k))] \tag{2.66}$$

稳定运转时对应 $\frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}t}=0$，这意味着在激光阈值之上，稳态振动条件为

$$\alpha_{rn} = \frac{\omega P_k^2}{2\varepsilon\gamma\hbar V}\sum_k \mathscr{L}d_0(k) = \frac{\omega}{2Q_n} \tag{2.67}$$

即饱和增益等于腔的损失。利用增益 α_{rn} 则总载流子方程(2.61)式成为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda - \lambda_{th} - \alpha_{rn} n(t) \tag{2.68}$$

其中 $n(t)$ 为光子数密度，定义为

$$n(t) = \varepsilon_0 E_n^2/\hbar\omega \tag{2.69}$$

λ_{th} 为泵浦阈值，且

$$\lambda_{th} = r_{nr}N_0 + \Gamma V^{-1}\sum_k f_e(k)f_h(k) \tag{2.70}$$

式中 $N_0 = V^{-1}\sum\limits_k f_\alpha(k)$，$\alpha = e$ 或 h，方程(2.70)式只有数字解，用 $2\varepsilon_0 E_n/\hbar\omega$ 乘(2.64)式得到光子数密度方程为

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = 2n(t)(\alpha_{rn} - \omega/2Q_n) \tag{2.71}$$

由 $\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0$ 得到稳态光子数密度为

$$n = (\beta - 1)n_s \tag{2.72}$$

其中 $\beta = \lambda/\lambda_{th}$ 为泵浦相对值，$n_s = \lambda_{th}/\alpha_{rn}$ 为饱和光子数密度。(2.72)式显示激光强度正比于泵浦的速率。

激光器振动频率 ω_n 相对于谐振腔振动频率 Ω_n 的位移，由(2.64)式的第二式给出，其中

$$\alpha_{\text{in}} = \frac{\omega P_E^2}{2\varepsilon_0 \gamma^2 \hbar V} \sum_k [f_e(k) + f_h(k)](\omega_{ab} - \omega_n)\mathscr{L} \qquad (2.73)$$

从(2.65)式得到介质电极化率的实部

$$\chi'_n = \frac{\omega P_E^2}{\varepsilon_0 \gamma^2 \hbar V} \sum_k [f_e(k) + f_h(k)](\omega_{ab} - \omega_n)\mathscr{L} \qquad (2.74)$$

由于分布 f_a 与强度有关，上式意味着非线性介质具有反聚焦性质。

3. 激光增益的数值计算

为从(2.66)式具体计算复增益系数 α_n，必须将求和变成积分。相应的变化为

$$\frac{1}{V}\sum_k \to \frac{2 \times 4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 \mathrm{d}k \qquad (2.75)$$

其中因子2来自电子有两个自旋态，4π 来自立体角，利用能量 ε 与波矢 k 的关系 $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$，有

$$k\mathrm{d}k = \sqrt{2}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \qquad (2.76)$$

代入(2.75)式，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}\sum_k &\to \frac{(2m/\hbar^2)^{3/2}}{2\pi^2}\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \\ &= \frac{1}{2\pi^2 a_0^3 E_R^{3/2}}\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \end{aligned} \qquad (2.77)$$

其中，a_0 为激子的玻尔半径，E_R 为相应的里德堡能量，分别定义为

$$a_0 = \frac{\hbar^2 \varepsilon'}{me^2} \qquad E_R = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \qquad (2.78)$$

ε' 为介质的电容率，取近似后的载流子密度为

$$N \approx \frac{1}{2\pi^2 a_0^3 E_R^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon/\overline{m}_a - \mu_a)} + 1} \qquad (2.79)$$

其中有效质量比 $\bar{m}_a = m_a/m$，$\beta = \frac{1}{kT}$。用 ε 表示调谐能差

$$\hbar(\omega_{ab} - \omega) = (\hbar\omega_{ab} - \varepsilon_g - \delta\varepsilon_g) - (\hbar\omega - \varepsilon_g - \delta\varepsilon_g)$$

$$= \varepsilon - \hbar\delta$$

γ 的倒数 $\tau_c = 1/\gamma$ 是载流子之间散射时间，在相同近似下光学增益系数(2.67)式为

$$\alpha_r = \frac{\omega P_k^2}{2\varepsilon\gamma\hbar(2\pi^2 a_o^3 E_R^{3/2})}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon}{1 + (\varepsilon - \hbar\delta)^2/(\hbar\gamma)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\varepsilon}{\bar{m}_e} - \mu_e\right)\right]+1} + \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\varepsilon}{\bar{m}_h} - \mu_h\right)\right]+1} - 1\right] \tag{2.80}$$

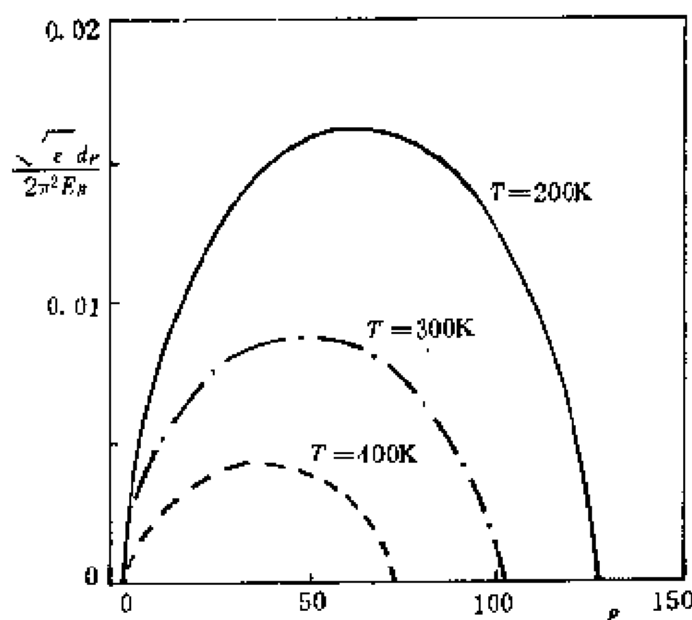


图 2.6

图2.6给出几率差 $\sqrt{\varepsilon}\,d_0(k) = \sqrt{\varepsilon}\,(f_e(k) + f_h(k) - 1)$ 与折合质量能量 ε 的关系。相应载流子的密度为

$$N_0 = 3.5\times10^{18}\ \text{载流子/厘米}^3$$

图中显示了增益随温度增加而减少，激光产生阈值对应的最小载流子密度 N_0 和失谐 δ_0 可从(2.67)式得到。其值与温度有关，当 $T=300\mathrm{K}$ 时，利用数值解给出 $N_0 \approx 1.21\times10^{18}$ 载流子/厘米^3。

习　　题

2.1 在介质中电场强度 $\vec{E}$ 满足波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

式中 $\vec{P}$ 为电极化强度，设波是 z 方向传送的平面偏振波，取

$$E(z,t)=\frac{1}{2}\hat{x}E_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t-\Phi(z,t))}$$

$$P(z,t)=\frac{1}{2}\hat{x}P_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t-\Phi(z,t))}$$

E_0 和 P_0 为慢变化振幅，在慢变化振幅位相近似下推导出

$$\frac{\partial E_0}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t}=-\frac{k}{2\varepsilon}\mathrm{Im}(P_0)$$

$$E_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=-\frac{k}{2\varepsilon}\mathrm{Re}(P_0)$$

提示：E_0，Φ 的二次微商和 P_0 的一次微商项可以被忽略。

2.2 试列出引入密度矩阵方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{aa}}{\mathrm{d}t}=\lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-R[\rho_{aa}-\rho_{bb}]$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{bb}}{\mathrm{d}t}=\lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+R[\rho_{aa}-\rho_{bb}]$$

所取的8个近似条件。

2.3 若介质的电极化强度与电场强度 E_n 成线性关系

$$P_n=\varepsilon_0(\chi'_n+\mathrm{j}\chi''_n)E_n$$

证明以下结果：

$$\omega_n=\Omega_n-\frac{\omega}{2\varepsilon_0}\chi'_n$$

$$E_n=E_n^{(0)}\exp\left[-\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{Q_n}+\frac{\chi''}{\varepsilon_0}\right)t\right]$$

提示:利用激光自洽场方程,取$\frac{d\Phi_{\nu}}{dt}=0$。

2.4 试由自洽场方程证明激光器单程增益系数可表示为

$$G=\frac{\omega}{c}\left(\frac{P_{B}^{2}N}{\hbar\gamma\varepsilon_{0}}-\frac{1}{Q}\right)$$

其中 N 为反转粒子数密度,Q 为谐振腔的品质因数。

2.5 在稳态条件下,试由自洽场方程推导出兰姆凹陷的条件为

$$\overline{D}>1+2\left(\frac{\gamma}{ku}\right)^{2}$$

2.6 试论证在半导体介质中慢变化复极化强度

$$P_{n}=-\frac{iP_{B}^{2}E_{n}}{\hbar\gamma V}\sum_{k}\mathscr{L}\left[d_{0}-i(\omega_{ab}-\omega_{n})\gamma^{-1}(f_{e}+f_{h})\right]$$

其中 $\mathscr{L}$ 为罗仑兹位形,$d_{0}=f_{e}+f_{h}-1$为几率差。

2.7 试阐述半导体激光器增益对载流子密度 N_{0}和温度 T 的依赖关系。

参 考 文 献

〔1〕M. 萨晋Ⅲ,M. O 斯考莱,W. E. 兰姆. 激光物理学. 科学出版社,1982.

〔2〕邹英华,孙驹亨. 激光物理学. 北京大学出版社,1991.

〔3〕Hermann,Haken. Laser Theory. Springer—Verlag Berlin,1984.

〔4〕P. W. Milonn,J. H. Eberly. Lasers. John wiley,New York,1988.

〔5〕P. Meystre,M. Sargent. Elements of Quantum Optics. Springer verley,Berlin,1990.

第三章　电磁场的量子化

前两章介绍了量子力学的基础知识及在激光中的应用，其中电磁场是经典的。为了对光学问题进行全量子论处理，必须对电磁场进行量子化。本章将介绍电磁场的量子化方程及量子化电磁场的性质。

本章第一节介绍电磁场的正则量子化方法、光子数态、光子的位相算符及光子数态与位相态的性质。第二节介绍相干态与电磁场的相干性质。相干态是量子光学中的重要概念和重要的理论工具。第三节介绍电磁场的表示，将态矢量和密度算符按相干态展开，并引入电磁场的各种函数表示，其中有 P 表示、Wigner 表示、Q 表示和复 P 表示，利用这些表示可以将算符方程变为 C 数方程。第四节讨论原子与辐射场的相互作用，将对电子波场进行量子化，即二次量子化，讨论辐射场与电子波场的作用，引入穿衣原子态，并讨论量子崩坍与再生现象。最后一节介绍量子噪声问题。

§3-1 电磁场的量子化

在一般量子电动力学中，电磁场量子化是通过引入矢势做正则坐标，引出相应正则动量，然后利用正则量子化方法对场进行量子化。这种方法严谨，但步骤比较复杂，而在常见的量子光学中采用比较简单的仿谐振子量子化方法，即将电磁场放在一个谐振腔内，并形成驻波，每个驻波可看成一个振子，再用量子力学中谐振子量子化步骤对电磁场量子化。本章介绍正则量子化方法，而将仿谐振子量子化方法留为习题，由读者自已去完成。

1. 电磁场的正则量子化

对自由电磁场，自由电荷和电流为零，这时的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{3.1}$$

在均匀介质中

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

引入矢势 $\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dot{\vec{A}} \tag{3.2}$$

在库仑规范下 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，矢势 $\vec{A}$ 满足波动方程：

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

在真空中，$\mu\varepsilon = \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$，方程(3.3)式为 $\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$，取 $\vec{A}$ 为正则坐标，拉氏密度为

$$L = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 - \mu H^2)$$

正则动量为

$$\vec{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{A}}} = \varepsilon \dot{\vec{A}} = -\varepsilon \vec{E} = -\vec{D} \tag{3.4}$$

系统的哈密顿量为

$$\mathscr{H} = \int (\vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - L)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int (\varepsilon E^2 - \mu H^2)\mathrm{d}V$$

为方便起见，人们总是将所描述的场限制在一定的空间体积内，这时矢势可以用正交模函数展开

$$\vec{A}=\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{k}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon\omega_k}\right)^{1/2}\left[a_{k\tau}\vec{u}_{k\tau}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}+a_{k\tau}^{*}\vec{u}^{*}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right] \quad (3.5)$$

其中

$$\overrightarrow{u_{k\tau}}=L^{-3/2}\vec{\varepsilon}_{k\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

τ 表示电磁场的两个偏振方向，$\vec{k}$ 为波矢。广义动量为

$$\vec{\Pi}=\varepsilon\dot{\vec{A}}=\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{k}\left(\frac{\varepsilon\hbar\omega_k}{2}\right)^{1/2}\left[-\mathrm{i}a_{k\tau}\vec{u}_{k\tau}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}+\mathrm{i}a_{k\tau}^{*}\vec{u}_{k\tau}^{*}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right]$$

正则量子化方法就是将正则坐标和动量变成算符

$$\hat{\vec{A}}=\sum_{k\tau}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon\omega_k}\right)^{1/2}\left(\hat{a}_{k\tau}\vec{u}_{k\tau}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}+a_{k\tau}^{+}\vec{u}_{k\tau}^{*}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right] \quad (3.6)$$

$$\hat{\vec{\Pi}}=-\mathrm{i}\sum_{k\tau}\left(\frac{\hbar\varepsilon\omega_k}{2}\right)^{1/2}\left(\hat{a}_{k\tau}\vec{u}_{k\tau}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}-a_{k\tau}^{+}\vec{u}_{k\tau}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right] \quad (3.7)$$

量子化后的哈密顿算符为

$$\hat{\mathscr{H}}=\sum_{k\tau}\hbar\omega_k\left(\hat{a}_{k\tau}^{+}\hat{a}_{k\tau}+\frac{1}{2}\right) \quad (3.8)$$

其中 $\hat{a}_{k\tau}^{+}$ 与 $\hat{a}_{k\tau}$ 分别是电磁场中光子的产生与湮灭算符。量子化后，电磁场变成了光子场，$\hat{a}_{k\tau}^{+}$ 与 $\hat{a}_{k\tau}$ 满足对易关系

$$\left[\hat{a}_{k\tau},\hat{a}_{k'\tau'}^{+}\right]=\delta_{kk'}\delta_{\tau\tau'}$$

$$\left[\hat{a}_{k\tau},\hat{a}_{k'\tau'}\right]=\left[\hat{a}_{k\tau}^{+},\hat{a}_{k'\tau'}^{+}\right]=0 \quad (3.9)$$

正则坐标 $\hat{\vec{A}}$ 与正则动量 $\hat{\vec{\Pi}}$ 满足横对易关系

$$\left[\hat{\vec{A}}_j(r,t),\hat{\Pi}_l(r',t)\right]=\mathrm{i}\hbar\delta_{jl}^{T}(\vec{r}-\vec{r}')$$

式中，T 表示垂直于电磁波传播方向的横方向。量子化后电磁场状态可以用光子数表示。在一般量子电动力学中，光子没有确定位置，自由光子有确定动量和偏振方向，状态用波矢 k 与偏振方向 τ 表示。为简单起见，常省去 τ 只标出 k，故光子产生与湮灭算符分别为 $\hat{a}_k^{+}$ 和 $\hat{a}_k$，相应的哈密顿量和对易关系为

$$\hat{\mathscr{H}}=\sum_{k}\hbar\omega_k\left(\hat{a}_k^{+}\hat{a}_k+\frac{1}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$\left[\hat{a}_k,\hat{a}_{k'}^{+}\right]=\delta_{kk'}$$

2. 光子数态

电磁场经过量子化以后，电磁场变成光子场，电磁场状态将用光子数态 $|n_k\rangle$ 表示，它是哈密顿算符 $\hat{\mathscr{H}}$ 的本征态

$$\hat{\mathscr{H}}|n_k\rangle = \sum_{k'}\hbar\omega_{k'}(\hat{a}_{k'}^{+}\hat{a}_{k'} + \frac{1}{2})|n_k\rangle = \hbar\omega_k(n_k + \frac{1}{2})|n_k\rangle$$

光子数算符

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^{+}\hat{a}_k$$

$$\hat{n}_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle$$

电磁场的基态是真空态，表示为 $|0\rangle$，定义

$$a_k|0\rangle = 0$$

则基态的能量

$$\langle 0|\mathscr{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_k\hbar\omega_k$$

由于电磁场的模式无限，则给出的电磁场基态能量也无限，这是电磁场量子化一个概念性困难，但由实验测量，只是电磁场能量改变，则电磁场的无限大的零点能在实际中不会带来发散。产生与湮灭算符作用在光子数态上得到

$$\hat{a}_k|n_k\rangle = n_k^{1/2}|n_k - 1\rangle$$

$$\hat{a}_k^{+}|n_k\rangle = (n_k + 1)^{1/2}|n_k + 1\rangle \tag{3.11}$$

较高激发态矢量可用产生算符连续作用在真空态上得到

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^{+})^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}}|0\rangle \qquad n_k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.12}$$

光子数态是正交的

$$\langle n_k|m_k\rangle = \delta_{nm} \tag{3.13}$$

和完备的

$$\sum_{n_k=0}^{\infty}|n_k\rangle\langle n_k| = 1 \tag{3.14}$$

光子数态形成 Hilbert 空间一个完备的基矢，对光子数比较小

的情况是一个有用的表示。

光子数态$|n_k\rangle$的一个重要性质是光场的平均值为零。对光子场的电场强度算符

$$\vec{E} = \mathrm{i}\sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon}\right)^{1/2}\left[\hat{a}_k\vec{u}_k(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} - \hat{a}_k^+\vec{u}_k^*(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right] \tag{3.15}$$

利用(3.11)式和光子数态的正交关系，得到

$$\langle n_k|\vec{E}|n_k\rangle = 0$$

既然$|n_k\rangle$表示有n_k个光子的态，那么，为什么光场的平均值为零呢？这是因为光子数和位相是一对测不准量，满足测不准关系。既然态$|n_k\rangle$是光子数，且完全确定的，则必然是位相完全混乱，即频率为ω_k而位相完全混乱，所以电场测量平均值为零，而光强的平均值不为零

$$\langle n_k|\hat{E}^2|n_k\rangle = \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon}\right)\left(n_k + \frac{1}{2}\right) \tag{3.16}$$

3. 光子的位相算符

在经典光学中，当考虑光的干涉和衍射时最重要的量是位相。前面又指出，光子数和位相是一对测不准量，前面讨论电磁场量子化时，只考虑电磁场振幅而没有考虑位相，这里将讨论电磁场位相的量子化，引入光子位相算符，并研究位相算符本征态的性质。

在经典电磁场理论中，通常把复数振幅写成实数振幅与位相因子的乘积，相似的把算符$\hat{a}$和$\hat{a}^+$也写成振幅与位相算符的乘积

$$\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^+)^{1/2}\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})$$

$$\hat{a}^+ = \exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})(\hat{a}\hat{a}^+)^{1/2}$$

这样定义位相算符为

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi}) = (\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}\hat{a} \tag{3.17}$$

该位相算符最早是由 Susskind 和 Glogower 提出，称为 SG 位相算符。由于

$$\exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})=\hat{a}(\hat{a}\hat{a}^{+})^{-1/2}$$

则有

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})\exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})=1$$

算符 $\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})$ 用数态展开，得

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1| \tag{3.18}$$

不难证明

$$[\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi}),(\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi}))^{+}]=|0\rangle\langle 0|$$

$$\langle n-1|\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})|n\rangle=1$$

$$\langle n-1|\exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})|n\rangle=1 \tag{3.19}$$

表明 SG 位相算符是非么正的，也是非厄米算符，是不对应可观测的物理量，可定义如下的厄米算符

$$\cos\hat{\varphi}=\frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})+\exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})]$$

$$\sin\hat{\varphi}=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}\hat{\varphi})-\exp(-\mathrm{i}\hat{\varphi})] \tag{3.20}$$

可以证明

$$[\hat{n},\cos\hat{\varphi}]=-\mathrm{i}\sin\hat{\varphi}$$

$$[\hat{n},\sin\hat{\varphi}]=\mathrm{i}\cos\hat{\varphi} \tag{3.21}$$

这表明 $\hat{n}$ 和 $\hat{\varphi}$ 不可能同时确定，利用量子力学中测不准关系，对任意两力学量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 有

$$\Delta\hat{A}\cdot\Delta\hat{B}\geqslant\frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$$

则有

$$\Delta\hat{n}\Delta\cos\hat{\varphi}\geqslant\frac{1}{2}|\langle[\hat{n},\cos\hat{\varphi}]\rangle|=\frac{1}{2}|\langle-\mathrm{i}\sin\hat{\varphi}\rangle|$$

$$=\frac{1}{2}|\langle\sin\hat{\varphi}\rangle|$$

同理

$$\Delta\hat{n}\Delta\sin\hat{\varphi}\geqslant\frac{1}{2}|\langle\cos\hat{\varphi}\rangle| \tag{3.22}$$

表明光子数和位相不能同时精确地测定，这是量子化电磁场与经典电磁场的根本区别。

可以证明 $\cos\hat{\varphi}$ 和 $\sin\hat{\varphi}$ 是不对易的，表明它们不能同时精确测定，也没有共同表征态。但是在一定的极限条件下，$\cos\hat{\varphi}$ 和 $\sin\hat{\varphi}$ 可以有共同本征态 $|\varphi\rangle$。$|\varphi\rangle$ 为位相态，它可以用光子数态 $|n\rangle$ 的线性叠加表示，取

$$|\varphi\rangle = \lim_{S\to\infty}(S+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{S}\exp(in\varphi)|n\rangle \tag{3.23}$$

由于 $|n\rangle$ 是正交归一的，不难证明，$|\varphi\rangle$ 也是正交归一的

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\varphi\rangle &= \lim_{S\to\infty}(S+1)^{-1}\sum_{m}\sum_{n}\exp[(i(n-m)\varphi]\langle m|n\rangle \\ &= \lim_{S\to\infty}(S+1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}1 \\ &= 1\end{aligned}$$

当 $S\to\infty$ 时可给出

$$\cos\hat{\varphi}|\varphi-\cos\varphi|\varphi\rangle$$

表明 S 很大时 $|\varphi\rangle$ 是 $\cos\hat{\varphi}$ 的本征态。

下面再简单看一下光子数态的性质。所谓光子数态是光子数 n 完全确定的态，对这些态光子数的测量不确定性为零，即 $\Delta n=0$。

对光子数态，位相算符平均值为零，即

$$\langle n|\cos\hat{\varphi}|n\rangle = 0 \qquad n\neq 0$$

$$\langle n|\cos^2\hat{\varphi}|n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2} \tag{3.24}$$

表明 φ 是在 0 到 2π 之间完全无规分布，即表明光子数完全确定的态，其位相完全不确定。

§ 3-2 相干态与电磁场的相干性质

相干态在量子光学中是一个十分重要的概念，它的重要性一方面是相干态是实际存在的物理态，一般激光器产生的激光就是相干态。另外它在电磁场的量子理论与经典理论之间起桥梁作用，如果将量子理论中密度算符用相干态展开，会引入 P 表示，它是准概率分布函数，这样就将量子统计问题简化为经典概率统计问题，大大地简化了量子光学的讨论。

1. 相干态

有多种方法引入相干态，一种常用方法是利用量子的平均能量等于经典能量，若 $|\alpha\rangle$ 为相干态，从量子平均能量等于经典能量给出

$$\langle\alpha|\hat{a}^{+}\hat{a}|\alpha\rangle=\langle\alpha|\hat{a}^{+}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle \qquad (3.25)$$

Glauber 称(3.25)式为相干态条件，从这条件出发可以给出相干态是湮灭算符 $\hat{a}$ 的本征态

$$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \qquad (3.26)$$

由于 $\hat{a}$ 是非厄米算符，其本征值为复数，$\alpha=|\alpha|\exp(i\varphi)$，若把相干态写在粒子数态表象中，则有

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle&=e^{-|\alpha|^{2}/2}\sum_{n}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}|n\rangle\\&=e^{-|\alpha|^{2}/2}\sum_{n}\frac{(\alpha\hat{a}^{+})^{n}}{n!}|0\rangle\\&=\exp\left(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}\right)\exp(\alpha\hat{a}^{+})|0\rangle\end{aligned}$$

利用算符公式 $e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$，上式可以写为

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha\hat{a}^{+}-\alpha^{*}\hat{a}}|0\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle \qquad (3.27)$$

$D(\alpha)$称为平移算符，相干态是真空态的平移态。平移算符 $D(\alpha)$有以下性质

$$\hat{D}^{+}(\alpha)=\hat{D}^{-1}(\alpha)=\hat{D}(-\alpha)$$

$$\hat{D}^{+}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)=\hat{a}+\alpha$$

$$\hat{D}^{+}(\alpha)\hat{a}^{+}\hat{D}(\alpha)=\hat{a}^{+}+\alpha^{*}$$

利用相干态的定义式可以证明相干态有以下特性：

(a) 相干态是归一化的，但不是正交的

$$|\langle\alpha|\alpha\rangle|^{2}=1$$

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^{2}=\mathrm{e}^{-|\alpha-\beta|^{2}} \tag{3.28}$$

只有$|\alpha-\beta|\gg 1$才是近似正交的，相干态形成超完备态，完备性关系可证明为

$$\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^{2}\alpha=1 \tag{3.29}$$

(b) 在相干态中平均光子数

$$\bar{n}=\langle\alpha|\hat{a}^{+}\hat{a}|\alpha\rangle=|\alpha|^{2}$$

光子数的均方差为

$$\Delta n=[\langle\alpha|\hat{n}^{2}|\alpha\rangle-(\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle)^{2}]^{1/2}=|\alpha|$$

(c) 相干态中光子数分布为泊松分布

$$P(n)=|\langle n|\alpha\rangle|^{2}=\frac{\bar{n}^{n}}{n!}\exp(-\bar{n}) \tag{3.30}$$

(d) 相干态是测不准量为最小的量子态，相应正则坐标与正则动量有

$$\Delta q\Delta P=\hbar/2$$

若取 $\hat{a}=X_1+\mathrm{i}X_2$，可以证明

$$\Delta X_1\Delta X_2=\frac{1}{4}\qquad \Delta X_1=\frac{1}{2}\qquad \Delta X_2=\frac{1}{2} \tag{3.31}$$

X_1 与 X_2 分别称为相干态光场的余弦分量与正弦分量，这两分量均方差相等。

为更清楚的研究电磁场的相干性质，必须引入相关函数概念。

2. 场的相关函数

现讨论电磁场的探测。首先考虑采用最简单的装置：它是通过吸收光子引起的跃迁。在位置 r、时间 t 时，探测器吸收光子几率为

$$T_{if} \propto |\langle f|E^{(+)}(r,t)|i\rangle|^2$$

$|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 是耦合原子与场系统的初态与末态，在实际中我们测到的不是单一末态而是总的计数率。为给出总计数率必须对可能达到的末态求和，则总计数率或平均场强为

$$I(r,t) = \sum_f T_{fi} = \sum_f \langle i|E^{(-)}(r,t)|f\rangle\langle f|E^{(+)}(r,t)|i\rangle$$
$$= \langle i|E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)|i\rangle \qquad (3.32)$$

这里利用了完备性关系 $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$。上面结果是假定场是在纯态 $|i\rangle$，但该结果也容易推广到一般混合态

$$I(r,t) = \sum_i P_i\langle i|E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)|i\rangle$$

其中 P_i 是场在 i 态的几率。上式也可以表示为

$$I(r,t) = T_r\{\rho E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)\} \qquad (3.33)$$

其中 ρ 为密度算符，定义为

$$\rho = \sum_i P_i|i\rangle\langle i|$$

下面考虑在时空点 $x_1=(r_1,t_1)$ 和时空点 $x_2=(r_2,t_2)$ 场的关系。引入相关函数

$$G^{(1)}(x_1,x_2) = T_r[\rho E^{(-)}(x_1)E^{(+)}(x_2)] \qquad (3.34)$$

这为辐射场的一阶相关函数，利用这函数足以去讨论经典的杨氏干涉实验。但对 Hanbury Brown 和 Twiss 干涉实验，必须定义高阶相干函数。定义电磁场 n 阶相关函数为

$$G^{(n)}(x_1\cdots x_n,x_{n+1}\cdots x_{2n})$$
$$= T_r\{\rho E^{(-)}(x_1)\cdots E^{(-)}(x_n)E^{(+)}(x_{n+1})\cdots E^{(+)}(x_{2n})\} \qquad (3.35)$$

下面介绍相关函数的性质。对任意一个线性算符 $\hat{F}$ 有不等式

$$T_r\{\rho\hat{F}^+\hat{F}\}\geqslant 0$$

这来自 $\hat{F}^+\hat{F}$ 的非负特性。如选择 $\hat{F}=E^{(+)}(x)$，给出

$$G^{(1)}(x,x)\geqslant 0 \tag{3.36}$$

一般，若取

$$\hat{F}=E^{(+)}(x_n)\cdots E^{(+)}(x_1)$$

产生

$$G^{(n)}(x_1\cdots x_n,x_n\cdots x_1)\geqslant 0 \tag{3.37}$$

相关函数还具有以下性质

$$G^{(1)}(x_1,x_1)G^{(1)}(x_2,x_2)\geqslant |G^{(1)}(x_1,x_2)|^2 \tag{3.38}$$

或用电场表示

$$\begin{aligned}&|\langle E_1^{(-)}(x)E_1^{(+)}(x)E_2^{(+)}(x)E_2^{(-)}(x)\rangle|^2\\ \leqslant&\langle[E_1^{(-)}(x)E_1^{(+)}(x)]^2\rangle\langle[E_2^{(-)}(x)E_2^{(+)}(x)]^2\rangle\end{aligned} \tag{3.39}$$

经典光学干涉实验相应于一阶相关函数的测量，考虑杨氏干涉实验，达到 $x(r,t)$ 处的光是 x_1 和 x_2 处两针孔发出光波的叠加，见图 3.1。

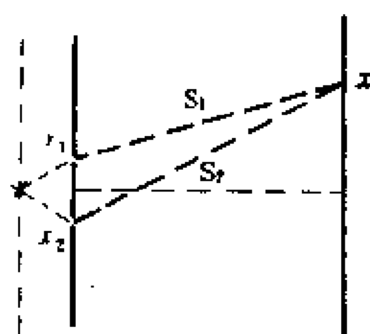


图 3.1　杨氏干涉

$$E^{(+)}(r,t)=E_1^{(+)}(r,t)+E_2^{(+)}(r,t) \tag{3.40}$$

考虑达到 x 处的光是 x_1 与 x_2 处的两球面波的叠加，其波幅为：

$$E^{(+)}(r,t)=\frac{E_1^{(+)}\left(r_1,t-\frac{S_1}{C}\right)}{S_1}+\frac{E_2^{(+)}\left(r_2,t-\frac{S_2}{C}\right)}{S_2} \tag{3.41}$$

近似取 $S_1=S_2=R$，有

$$E^{(+)}(r,t)=\frac{1}{R}[E_1^{(+)}(x_1)+E_2^{(+)}(x_2)] \tag{3.42}$$

在屏上观测到的强度将正比于

$$I=T_r\{\rho E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)\}$$

代入(3.42)式得到

$$I=G^{(1)}(x_1,x_1)+G^{(1)}(x_2,x_2)+2\mathrm{Re}\{G^{(1)}(x_1,x_2)\} \tag{3.43}$$

式中已将R^{-2}因子吸收到归一化因子中。右边前两项是每个针孔光单独达到x处的强度，第三项为干涉项，当$x_1\neq x_2$时，相关函数一般为复数，取为

$$G^{(1)}(x_1,x_2)=|G^{(1)}(x_1,x_2)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(x_1,x_2)}$$

得到

$$I=G^{(1)}(x_1,x_1)+G^{(1)}(x_2,x_2)+2|G^{(1)}(x_1,x_2)|\cos\Psi(x_1,x_2) \tag{3.44}$$

干涉图像主要取决于第三项，从不等式(3.38)式看出最佳的相干效果要求

$$|G^{(1)}(x_1,x_2)|^2=G^{(1)}(x_1,x_1)G^{(1)}(x_2,x_2)$$

引入归一化的相关函数

$$g^{(1)}(x_1,x_2)=\frac{G^{(1)}(x_1,x_2)}{[G^{(1)}(x_1,x_1)G^{(1)}(x_2,x_2)]^{1/2}} \tag{3.45}$$

则最佳相干条件为

$$|g^{(1)}(x_1,x_2)|=1 \tag{3.46}$$

或
$$g^{(1)}(x_1,x_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(x_1,x_2)}$$

相干图像边缘可见度定义为

$$v=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$$

将前面结果代入，得

$$v=\left|\frac{G^{(1)}(x_1,x_2)}{[G^{(1)}(x_1,x_1)G^{(1)}(x_2,x_2)]^{1/2}}\right|\frac{2(I_1,I_2)^{1/2}}{I_1+I_2}=|g^{(1)}|\frac{2(I_1,I_2)^{1/2}}{I_1+I_2} \tag{3.47}$$

当入射到两孔的光强相同时，边缘可见度正比于$|g^{(1)}|$。最佳相干条件为$|g^{(1)}|=1$。

如何从量子力学观点解释光的相干呢？最早解释是由 Dirac 给出的。内容见他写的经典著作《量子力学》。他认为观察到的强

度相干来自于单光子几率幅之间的干涉，量子力学解释的关键在于波函数给出的是每个光子在空间几率，因此相干是光子自己相干而不是不同的两个光子相干。

杨氏干涉实验既可以用经典波动力学解释也可以用量子力学解释。因此测量电磁场一阶相关函数的实验将不能区别光的量子理论与经典理论。为区别这两种理论，必须研究高阶相关函数。

3. 光子相关测量

第一个非单光子强度相关实验是由 Hanbury Brown 和 Twiss 做的。初始实验是与光子流的模拟相关，后来的实验中利用光子计数和数字相关，在本质上这实验是测量 t 时刻到达的光子和 $t+\tau$ 时刻到达光子的光子计数联合几率的测量。可以写出一个光子数相关函数，利用 Glauber 发展的量子探测理论，测量的量是二阶相关函数

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(\tau) &= \langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t+\tau)E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)\rangle \\
&= \langle :I(t)I(t+\tau):\rangle \propto \langle :n(t)n(t+\tau):\rangle \quad (3.48)
\end{aligned}
$$

其中“: :”表示正规乘积，$I(t)$是模拟测量强度，$n(t)$是光子数。引入二阶归一化的相关函数

$$
g^{(2)}(\tau)=\frac{G^{(2)}(\tau)}{|G^{(1)}(0)|^2} \quad (3.49)
$$

若对一个场 $g^2(\tau)=1$，则它具有二阶相干性。

下面计算某些量子力学场的二阶相关函数。首先考虑单模场，同时相关函数

$$
g^{(2)}(0)=\frac{\langle \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}\rangle}{\langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle^2}=1+\frac{V(n)-\bar{n}}{\bar{n}^2} \quad (3.50)
$$

其中 $V(n)=\langle(\hat{a}^+\hat{a})^2\rangle-\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle^2$是光子数偏差。

对于相干态

$$
\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad g^{(2)}(0)=1 \quad (3.51)
$$

且 $V(n)=\bar{n}$，光子数为 Poisson 分布。

对于粒子数态

$$\rho=|n\rangle\langle n|$$

$$g^2(0)=1-\frac{1}{n} \qquad n>2 \tag{3.52}$$

对于数态，光子数的方差为零($V(n)=0$)。若 $g^{(2)}(\tau)<g^{(2)}(0)$，则存在光子成对达到的趋势，将这情况视为光子聚束(bunching)。相反，当 $g^{(2)}(\tau)>g^{(2)}(0)$时，称为反聚束。如前所述，当有足够长时间标度 $g^{(2)}(\tau)\to1$ 时，若一个场 $g^{(2)}(0)<1$，在时间标度上明显显示反聚束。对于 $g^{(2)}(0)$小于 1 的情况，从经典分析中不能预言。一般预言是 $g^{(2)}(0)\geqslant1$。要使 $g^{(2)}(0)<1$，要求有负的几率，对真实几率分布是禁戒的，这种效应称为光子反聚束，它是电磁场的量子特性。

4. 量子力学光子计数分布

在量子力学中，光子计数分布类似于经典分布，可写成

$$P_n(T)=\langle :\frac{[\alpha I(T)T]^n}{n!}\exp[-\alpha\bar{I}(T)/T]:\rangle \tag{3.53}$$

其中

$$\bar{I}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T I(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)\mathrm{d}t \tag{3.54}$$

对单模场(3.53)式可以写为

$$P_n(T)=T_r\{\rho:\frac{[\mu(T)\hat{a}^+\hat{a}]^n}{n!}\exp[-\hat{a}^+\hat{a}\mu(T)]:\} \tag{3.55}$$

其中，$\mu(T)$是光场中在时间 T 内探测一个光子的几率，$\mu(T)$的显示与物理情况有关，对于开放系统 $\mu(T)=\lambda T$，对于闭合系统 $\mu(T)=(1-e^{-\lambda T})$。

光子计数分布与 ρ 的对角矩阵元 $P_n=\langle n|\rho|n\rangle$有关

$$P_m(T) = \sum_n P_n \frac{[\mu(T)]^m}{m!} \langle n | \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mu(T)^l}{l!} \hat{a}^{+m+l} \hat{a}^{m+l} | n \rangle \quad (3.56)$$

这给出

$$P_m(T) = \sum_{n=m}^{\infty} P_n \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^l \frac{[\mu(T)]^l}{l!} \frac{n!}{(n-m-l)!} \quad (3.57)$$

对 l 求和等价于二项式分布，可以写为

$$P_m(T) = \sum_{n=m}^{\infty} P_n \binom{n}{m} [\mu(T)]^m [1 - \mu(T)]^{n-m} \quad (3.58)$$

其中

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

这分布就是有名的 Bernoulli 分布。

对于相干光 P_n 为泊松分布

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n})$$

则

$$P_m(T) = \frac{[\mu(T)\bar{n}]^m}{m!} \exp[-\mu(T)\bar{n}] \quad (3.59)$$

对于混乱光

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$

$$P_m(T) = \frac{[\mu(T)\bar{n}]^m}{[1+\mu(T)\bar{n}]^{1+m}} \quad (3.60)$$

这与半经典方法得到的结果相似。

§3-3 电磁场的表示

由于电磁场具有许多模式，故对它的描述要求用量子统计方法，引入密度矩阵，这节介绍电磁场密度矩阵的若干表示。首先介绍用数态展开的表示，然后讨论用相干态展开引入的 P 表示、Q 表示和 Wigner（维格纳）表示。

1. 数态展开

由光子数态形成一个全集，因此密度矩阵可以用它展开

$$\rho = \sum C_{nm} |n\rangle\langle m|$$

采用的普遍的展开式，如果只考虑光子数分布，可用简化的展开式

$$\rho = \sum P_n |n\rangle\langle n| \tag{3.62}$$

其中 P_n 是一个几率分布，它给出在模中有 n 光子的几率。这种表示对某些场是有用的，如对混乱场，其分布为

$$P_n = \frac{1}{(1+\bar{n})}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \tag{3.63}$$

其中 $\bar{n}$ 是平均光子数，它从熵中取极大导出

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} \tag{3.64}$$

正好是黑体辐射的普朗克分布。根据(3.50)式，二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 为

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{V(n)-\bar{n}}{\bar{n}^2}$$

其中 $V(n)$ 是分布函数 P_n 的方差。对于(3.63)式的分布 $V(n) = \bar{n}^2 - n$，得到 $g^{(2)}(0)=2$，对光子的泊松分布

$$P_n = \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}\bar{n}^2 \tag{3.65}$$

其中方差 $V(n)=\bar{n}$，得 $g^{(2)}(0)=1$。对于相干态具有泊松分布，其 $g^{(2)}(0)=1$。对于一个光子数分布为泊松分布的非相干混合，其 $g^{(2)}(0)=1$，为了区别这两种场，必须进行位相有关的测量，例如测量 $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2$。

2. P 表示

下面在相干态中做展开。相干态 $|\alpha\rangle$ 形成一个完备集，事实上

它是超完备的，尽管它们是非正交的，人们还是以它为基展开，取

$$\rho = \int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha \tag{3.66}$$

其中 $d^2\alpha = d[\mathrm{Re}(\alpha)]d(\mathrm{Im}\,\alpha)$。可以认为函数 $P(\alpha)$ 类似于几率分布，由于 $|\alpha\rangle$ 是非正交的，故 $P(\alpha)$ 不能解释为真正几率分布。另外，对某些特征量子态 $P(\alpha)$，可为负值或高度奇异，这时 $P(\alpha)$ 就不能解释为经典几率分布。下面介绍几个能用 P 表示描写的例子。

(a) 相干态

$$\rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$$

则

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0) \tag{3.67}$$

(b) 混沌态

根据中心极限定理，对于混沌态，$P(\alpha)$ 是高斯型

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha|^2/\bar{n}} \tag{3.68}$$

它对应的 P_n 为

$$P_n = \langle n|\rho|n\rangle = \int P(\alpha)\,|\langle n|\alpha\rangle|^2 d^2\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi \bar{n}} \int e^{-|\alpha|^2/\bar{n}} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha$$

利用恒等式

$$\pi^{-1}(l!m!)^{-1/2}\int \exp(-C|\alpha|^2)\alpha^l(\alpha^*)^m d^2\alpha = \delta_{lm}C^{-(n+1)}$$

取 $C = \frac{1+\bar{n}}{\bar{n}}$，得

$$P_n = \frac{1}{1+\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \tag{3.69}$$

对于相干态和混沌态混合的 P 函数为

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha-\alpha_0|^2/\bar{n}} \tag{3.70}$$

它可以利用 $P(\alpha)$ 以下的卷积性质导出。考虑一个场由两个独立源

产生，第一个源单独作用产生的场为

$$\rho_1 = \int P_1(\alpha_1)|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|\mathrm{d}^2\alpha_1$$

第二个源单独作用产生的场为

$$\rho_2 = \int P_2(\alpha_2)|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|\mathrm{d}^2\alpha_2$$

$$= \int P_2(\alpha_2)D(\alpha_2)|0\rangle\langle 0|D^{-1}(\alpha_2)\mathrm{d}^2\alpha_2$$

在第一个源作用后第二个源作用产生的场为

$$\rho = \int P_2(\alpha_2)D(\alpha_2)\rho_1 D^{-1}(\alpha_2)\mathrm{d}^2\alpha_2$$

$$= \int P_2(\alpha_2)P_1(\alpha_1)|\alpha_1+\alpha_2\rangle\langle\alpha_1+\alpha_2|\mathrm{d}^2\alpha_1\mathrm{d}^2\alpha_2$$

则重叠激发的权重函数 $P(\alpha)$ 为

$$P(\alpha) = \int \delta^2(\alpha-\alpha_1-\alpha_2)P_1(\alpha_1)P_2(\alpha_2)\mathrm{d}^2\alpha_1\mathrm{d}^2\alpha_2$$

$$= \int P_1(\alpha-\alpha')P_2(\alpha')\mathrm{d}^2\alpha' \tag{3.71}$$

由此看出两个场叠加的分布函数为每个场分布函数的卷积。

算符正规积的 $P(\alpha)$ 表示为

$$\langle \hat{a}^{+s}\hat{a}^{n}\rangle = \int P(\alpha)\alpha^{*s}\alpha^{n}\mathrm{d}^2\alpha \tag{3.72}$$

二阶相关函数用 $P(\alpha)$ 表示为

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\int P(\alpha)[(|\alpha|^2) - \langle|\alpha|^2\rangle]^2\mathrm{d}^2\alpha}{[\int P(\alpha)|\alpha|^2\mathrm{d}^2\alpha]^2} \tag{3.73}$$

看上去与经典场表示一样，然而有所不同。由于 $P(\alpha)$ 可以为负值，则 $g^{(2)}(0)$ 不再是大于或等于 1，而允许 $g^{(2)}(0)<1$，对应光子反聚束。除反聚束外，压缩态 $P(\alpha)$ 也为负的，具体内容下章再介绍。

一些量子场，其 $P(\alpha)$ 是正的，将有类似的经典描述，即相干场与混沌场。另一些场，如反聚束和压缩场，P 表示是负的或高度奇

异，没有对应经典表示，而粒子数态，就找不到合适的P表示，必须用另外的表示。

有时场的P表示可通过特征函数求出。密度算符 ρ 的特征函数为

$$\chi(\eta)=T_r\{\rho e^{\eta\hat{a}^{+}-\eta^{*}\hat{a}}\} \tag{3.74}$$

也可以定义正常序和反常序特征函数

$$\chi_N(\eta)=T_r\{\rho\, e^{\eta\hat{a}^{+}}e^{-\eta^{*}\hat{a}}\} \tag{3.75 a}$$

$$\chi_A(\eta)=T_r\{\rho\, e^{-\eta^{*}\hat{a}}e^{\eta\hat{a}^{+}}\} \tag{3.75 b}$$

利用算符公式

$$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \tag{3.76}$$

可得到特征函数关系

$$\chi(\eta)=\chi_N(\eta)\exp(-\frac{1}{2}|\eta|^2) \tag{3.76a}$$

如果密度算符有P表示，则特征函数 $\chi_N(\eta)$ 为

$$\begin{aligned}\chi_N(\eta)&=\int\langle\alpha|e^{\eta\hat{a}^{+}}e^{-\eta^{*}\hat{a}}|\alpha\rangle P(\alpha)d^2\alpha\\&=\int e^{\eta\alpha^{*}-\eta^{*}\alpha}P(\alpha)d^2\alpha\end{aligned} \tag{3.77}$$

若写出 η 和 α 的实部和虚部，上式表示 $\chi_N(\eta)$ 是 $P(\alpha)$ 的二维富氏变换，则 $P(\alpha)$ 可以写为 $\chi_N(\eta)$ 的反富氏变换

$$P(\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int e^{\alpha\eta^{*}-\alpha^{*}\eta}\chi_N(\eta)d^2\eta \tag{3.78}$$

如此P表示存在的判据是正常序特征函数 $\chi_N(\eta)$ 存在富氏变换。

3. 维格纳(Wigner)表示

维格纳函数可以定义为对称序特征函数 $\chi(\eta)$ 的富氏变换

$$W(\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int\exp(\eta^{*}\alpha-\eta\alpha^{*})\chi(\eta)d^2\eta \tag{3.79}$$

维格纳分布常存在，但不一定是正的。

维格纳表示和 P 表示的关系可以通过特征函数得到，利用正常序和对称序特征函数关系(3.76a)，这时维格纳函数为

$$W(\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int\exp(\eta^*\alpha-\eta\alpha^*)\chi_N(\eta)e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}d^2\eta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int T_r\{\rho e^{\eta(a^+-\alpha^*)}e^{-\eta^*(\hat{a}-\alpha)}\}e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}d^2\eta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int P(\beta)\exp[\eta(\beta^*-\alpha^*)-\eta^*(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}|\eta|^2]d^2\eta d^2\beta$$

利用积分恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\eta\exp(-\lambda|\eta|^2+\mu\eta+\nu\eta^*)=\frac{1}{\lambda}\exp(\frac{\mu\nu}{\lambda})$$

对任意 μ、ν 和 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ 成立，则给出

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int P(\beta)\exp(-2|\beta-\alpha|^2)d^2\beta \tag{3.80}$$

这表明维格纳表示是 P 表示的高斯型卷积。下面研究几种辐射场的维格纳函数。

对相干态 $|\alpha\rangle=|\frac{1}{2}(x_1+ix_2)\rangle$ 的维格纳函数是

$$W(x_1',x_2')=\frac{2}{\pi}\exp[-\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2)] \tag{3.81}$$

表明维格纳函数是高斯型的，其中 $x_i'=x_i-X_i$，维格纳函数周线对应

$$x_1'^2+x_2'^2=1$$

它是以 X_1，X_2 点为中心、半径为 1 的圆。

对于数态 $|n\rangle$ 的维格纳函数是

$$W(x_1,x_2)=\frac{2}{\pi}(-1)^n L_n(4r^2)e^{-2r^2} \tag{3.82}$$

其中 $r^2=x_1^2+x_2^2$，$L_n(x)$ 是拉盖尔多项式，显然这维格纳函数是负的。

4. Q 表示

Q 表示是密度算符在纯相干态中的对角矩阵元

$$Q(\alpha)=\frac{\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle}{\pi}\geqslant 0 \tag{3.83}$$

显然它是正的而且有界

$$Q(\alpha)<\frac{1}{\pi}$$

Q 函数可以表示为反正常序特征函数 $\chi_A(\eta)$的富氏变换

$$\begin{aligned}\chi_A(\eta) &= T_r\{\rho e^{-\eta^*a}e^{\eta a^+}\}\\ &=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\langle\alpha|e^{\eta a^+}\rho e^{-\eta^*\hat{a}}|\alpha\rangle\\ &=\int e^{\eta\alpha^*-\eta^*\alpha}Q(\alpha)d^2\alpha\end{aligned} \tag{3.84}$$

$Q(\alpha)$是 $\chi_A(\eta)$的反富氏变换

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int e^{(\alpha\eta^*-\alpha^*\eta)}\chi_A(\eta)d^2\eta \tag{3.85}$$

$Q(\alpha)$与 $P(\alpha)$的关系为

$$\begin{aligned}Q(\alpha) &= \frac{\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int P(\beta)|\langle\alpha|\beta\rangle|^2d^2\beta\\ &=\frac{1}{\pi}\int P(\beta)e^{-|\alpha-\beta|^2}d^2\beta\end{aligned} \tag{3.86}$$

则 $Q(\alpha)$也是 P 函数的高斯卷积函数，利用 Q 表示容易求反常序矩

$$\langle\hat{a}^n\hat{a}^{+m}\rangle=\int\alpha^n\alpha^{*m}Q(\alpha,\alpha^*)d^2\alpha \tag{3.87}$$

对于相干态 $|\beta\rangle$，Q 表示为

$$Q(\alpha)=\frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\pi}=\frac{e^{-|\alpha-\beta|^2}}{\pi} \tag{3.88}$$

对于数态 $|n\rangle$的 Q 表示为

$$Q(\alpha)=\frac{|\langle\alpha|n\rangle|^2}{\pi}=\frac{|\alpha|^{2n}e^{-|\alpha|^2}}{\pi n!} \tag{3.89}$$

5. 广义的 P 表示

前面考虑的 P 表示只依赖于复数 α，这里引入的 P 表示是由两个复变数 α 与 β 的函数，广义的 P 表示定义为

$$\rho = \int_D \Lambda(\alpha,\beta) P(\alpha,\beta) \mathrm{d}\mu(\alpha,\beta) \tag{3.90}$$

其中

$$\Lambda(\alpha,\beta) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle}$$

投影算符 $\Lambda(\alpha,\beta)$ 是 α 和 β 中的解析函数，D 为积分范围，从 ρ 的归一化条件导致 $P(\alpha,\beta)$ 的归一化条件为

$$\int_D P(\alpha,\beta) \mathrm{d}\mu(\alpha,\beta) = 1 \tag{3.91}$$

$\mathrm{d}\mu(\alpha,\beta)$ 是积分的程序，它的不同选择反应不同的 P 表示，若取

$$\mathrm{d}\mu(\alpha,\beta) = \delta^2(\alpha^* \quad \beta) \mathrm{d}^2\alpha \mathrm{d}^2\beta \tag{3.92}$$

这相应前面介绍过的对角 Glauber-Sudarshan 的 P 表示。由(3.66)式所定义。

复 P 表示相应

$$\mathrm{d}\mu(\alpha,\beta) = \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta \tag{3.93}$$

其中 α,β 都为复变数，积分范围分别为 C,C'。下面给出复 P 表示的一些例子。

(a) 相干态 $|\gamma\rangle$

考虑在相干态中展开的密度算符为

$$\rho = \iint_{D\,D'} \rho(\alpha,\beta) |\alpha\rangle\langle\beta^*| \mathrm{d}^2\alpha\, \mathrm{d}^2\beta \tag{3・94}$$

利用留数定理

$$\rho = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{D\,D'} \rho(\alpha,\beta) \langle\beta^*|\alpha\rangle \left(\oint_C \oint_{C'} \frac{\Lambda(\alpha',\beta') \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\beta'}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')} \right) \mathrm{d}^2\alpha\, \mathrm{d}^2\beta$$

交换积分次序可看出复 P 表示函数为

$$P(\alpha,\beta) = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_{D D'} \rho(\alpha',\beta')\langle\beta'^*|\alpha'\rangle \frac{d^2\alpha' d^2\beta'}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')} \tag{3.95}$$

这样对相干态$|\gamma_0\rangle$有

$$P(\alpha,\beta) = -\frac{1}{4\pi^2(\alpha-\gamma_0)(\beta-\gamma_0^*)} \tag{3.96}$$

(b) 数态$|n\rangle$

因数态没有经典对应，它的 Glauber-Sudarshan P 表示将是奇异的，它的复 P 表示可以证明为

$$P(\alpha,\beta) = -\frac{1}{4\pi^2}e^{\alpha\beta}\frac{n!}{(\alpha\beta)^{n+1}} \tag{3.97}$$

证明如下。利用

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{\alpha^*\beta-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2}$$

和

$$|\alpha\rangle = \sum\frac{e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^n|n\rangle}{n!^{1/2}}$$

则ρ可以写为

$$\rho = \int P(\alpha,\beta)\sum\frac{|n'\rangle\langle m'|}{(n'!)^{1/2}(m'!)^{1/2}}e^{-\alpha\beta}(\alpha^{n'},\beta^{m'})d\alpha\, d\beta$$

将(3.97)式的$P(\alpha,\beta)$代入，得

$$\rho = -\frac{1}{4\pi^2}\sum\frac{(n!)^2}{(n'!)^{1/2}(m'!)^{1/2}}\int\alpha^{-(n+1-n')}\beta^{-(n+1-m')}|n'\rangle\langle m'|d\alpha d\beta \tag{3.98}$$

选择积分回路包围原点并利用柯西定理

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint dz z^n &= 0 \qquad n\geqslant 0\\ &= 1 \qquad n=-1\\ &= 0 \qquad n<-1\end{aligned}$$

得到 $\rho = |n\rangle\langle n|$

若积分变数取

$$d\mu(\alpha,\beta)=d^2\alpha\, d^2\beta$$

这表示允许在整个复平面中，α，β 独立变化，可证明对有物理实质密度算符的 $P(\alpha,\beta)$ 总是存在，而且常为正值，因此称为正 P 表示。$P(\alpha,\beta)$ 具有真正几率的数学性质，可以解释为几率分布函数，可以证明它是一个非常有用的表示，特别是在当其他表示具有非正定扩散矩阵时的福克—普朗克方程中。

§3-4 原子与辐射场的相互作用

前面介绍的是自由电磁场的量子化，这节讨论辐射场与原子的相互作用，为了给出相互作用的量子化理论，首先必须让原子中电子波函数量子化。

1. 电子波场的量子化

电子场的一般波函数 $\Psi(r)$ 可以用原子中电子波函数的全集 $\varphi_j(r)$ 作展开，原子中电子波函数 $\varphi_j(r)$ 满足薛定谔方程

$$H_0\Phi_j(r)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Phi_j(r)=E_j\Phi_j(r) \tag{3.99}$$

其中 V 是核与电子作用的库仑势。若忽略电子之间作用，可取

$$\Psi(r)=\sum_j a_j\Phi_j(r)$$

用类似于光场量子化，将展开式系数 a_j 看成场算符，$\Psi(r)$ 变成算符

$$\hat{\Psi}(r)=\sum_j \hat{a}_j\Phi_j(r) \tag{3.100}$$

$\Phi_j(r)$ 满足正交归一化条件

$$\int\Phi_i^*(r)\Phi_j(r)d^3r=\delta_{ij} \tag{3.101}$$

这时系统的能量算符为

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \int \hat{\Psi}^+(r) H_0 \hat{\Psi}(r) \mathrm{d}^3 r \tag{3.102}$$

利用(3.100)式和 Φ 的正交关系得

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_j E_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \tag{3.103}$$

$\hat{a}_j^+ \hat{a}_j$ 为电子在能级 j 的占有数算符。引入真空态 $|0\rangle$，并定义为

$$\hat{a}_j |0\rangle = 0 \tag{3.104}$$

在 j 态上有一个电子表示为 $\hat{a}_j^+ |0\rangle$，由于泡里不相容原理，在一个态上不可能存在两个电子，因此有

$$\hat{a}_j^+ \hat{a}_j^+ |0\rangle = 0$$

其实对任何态 $(\hat{a}_j^+ \hat{a}_j^+) |\varphi\rangle = 0$，由于电子是费米子，它的产生与湮灭算符服从反对易关系

$$\{\hat{a}_j^+ \hat{a}_k\} = \hat{a}_j^+ \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_j^+ = \delta_{kj} \tag{3.105}$$

$$\hat{a}_j^+ \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_j^+ = 0 \qquad \hat{a}_j \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_j = 0$$

则电子场也满足以下反对易关系

$$\hat{\Psi}(r) \hat{\Psi}^+(r') + \hat{\Psi}^+(r') \hat{\Psi}(r) = \delta(r - r') \tag{3.106}$$

这些公式对多体问题也是适用的。几个电子占有量子态 $j_1, \cdots, j_n$，表示为

$$|\{j\}\rangle = \hat{a}_{j1}^+ \hat{a}_{j2}^+ \cdots \hat{a}_{jn}^+ |0\rangle$$

算符 $\hat{F}$ 的期望值为

$$\langle \{j\} | \int \hat{\Psi}^+(r) \hat{\Psi}(r) \mathrm{d}^3 x | \{j\} \rangle$$

$$= \langle \{j\} | \sum_{j,l} \hat{a}_j^+ \hat{a}_l \int \Phi_j^*(r) \hat{F}(r) \Phi_l(r) \mathrm{d}^3 r | \{j\} \rangle \tag{3.107}$$

在量子光学中主要涉及单电子态。

2. 辐射场与电子场间的互作用

辐射场与电子相互作用。其哈密顿量为

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2m}(\vec{P}-e\vec{A})^2+eV(r)+\mathscr{H}_r$$

其中 $V(r)$ 是库仑势，$\vec{P}$ 是电子的动量，$\vec{A}$ 是电磁场矢势。$\mathscr{H}_r$ 为自由辐射场哈密顿量，当辐射场和电子波场量子化后，哈密顿量表示为

$$\hat{\mathscr{H}}=\hat{\mathscr{H}}_{el}+\hat{\mathscr{H}}_I+\hat{\mathscr{H}}_r \tag{3.108}$$

其中

$$\hat{\mathscr{H}}_{el}=\int\hat{\Psi}^+(r)[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+eV(r)]\hat{\Psi}(r)\mathrm{d}^3r$$

是电子自由运动哈密顿量，$\hat{\mathscr{H}}_I$ 描述电子与光场作用，可以分为两部分

$$\hat{\mathscr{H}}_{I1}=\int\hat{\Psi}^+(r)[-\frac{e}{m}\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{P}})\hat{\Psi}(r)\mathrm{d}^3r$$

$$\hat{\mathscr{H}}_{I2}=\int\hat{\Psi}^+(r)[-\frac{e^2}{2m}\hat{A}^2)\hat{\Psi}(r)\mathrm{d}^3r$$

对单光子过程，A^2 项可以忽略，就是双光子过程，A^2 项贡献很小也常被忽略，电子波场算符 $\hat{\Psi}(r)$ 可以用非微扰波函数 $\Phi_j(r)$ 展开

$$\hat{\Psi}(r)=\sum_j\hat{a}_j\Phi_j(r)$$

电子波场的哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}}_{el}=\sum_j E_j\hat{a}_j^+\hat{a}_j$$

$$\hat{\mathscr{H}}_{I1}=\hbar\sum_{jk\lambda}\hat{a}_j^+\hat{a}_k(g_{\lambda jk}\hat{b}_\lambda+g_{\lambda jk}^*\hat{b}_\lambda^+) \tag{3.109}$$

其中 $\hat{b}_\lambda$ 是辐射场 λ 模式的湮灭算符，系数 g 为

$$g_{\lambda jk}=-\frac{e}{m}\left(\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda\varepsilon_0}\right)^{1/2}\int\Phi_j^+(r)[u_\lambda(r)\hat{\vec{P}}]\Phi_k(r)\mathrm{d}^3r \tag{3.109 a}$$

其中 u_λ 是模场函数，λ 求和包括波矢和偏振方向求和。

为简化 g 表示，取电偶极近似。假定模场函数 $u_\lambda(r)$ 变化比电子波函数慢，$u_\lambda(r)$ 可以提到积分号外用 $u_\lambda(r_0)$ 代替，r_0 是原子的位

置。在可见光范围内该近似是允许的.因这时光波的波长约为 10^3 Å,而原子线度 $r_0\sim 1$ Å。

取模函数为平面波

$$u_k(r)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

在一级近似下,用展开

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_0+\delta\vec{r})}=e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}(1+i\vec{k}\cdot\delta\vec{r}+\frac{1}{2}(\vec{k}\cdot\delta\vec{r})^2+\cdots)$$

$$\approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}$$

矩阵元 $e\int\Phi_j^*\vec{P}\Phi_l d^3r$ 可以写为偶极矩阵元

$$imv_{jl}\int\Phi_j^*e\vec{r}\Phi_l d^3r$$

m 为电子质量,而

$$v_{jl}=\frac{1}{\hbar}(E_j-E_l)$$

可证明

$$\int\Phi_j^*P\Phi_l d^3r=\frac{im}{\hbar}\int\Phi_j^*[\mathscr{H}_{el},r]\Phi_l d^3r$$

$$=\frac{im}{\hbar}[E_j-E_l]\int\Phi_j^*\vec{r}\Phi_l d^3r$$

$$=imv_{jl}\int\Phi_j^*\vec{r}\Phi_l d^3r$$

所以总哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}}_T=\hat{\mathscr{H}}_{el}+\hat{\mathscr{H}}_I+\hat{\mathscr{H}}_r \tag{3·110}$$

其中

$$\hat{\mathscr{H}}_{el}=\sum_j E_j\hat{a}_j^+\hat{a}_j$$

$$\hat{\mathscr{H}}_I=\hbar\sum_{jk\lambda}\hat{a}_j^+\hat{a}_k g_{\lambda jk}(\hat{b}_\lambda+\hat{b}_\lambda^+)$$

$$\hat{\mathscr{H}}_r=\sum_k\hbar\omega_k\hat{b}_k^+\hat{b}_k$$

(3.109 a)式中 $u_r(r_0)$ 位相的选取应使 $g_{\lambda jk}$ 为实数。总系统波函数 Ψ_T 满足薛定谔方程

$$(\hat{\mathscr{H}}_0+\hat{\mathscr{H}}_I)\Psi_T=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_T}{\partial t} \tag{3.111}$$

其中 $\hat{\mathscr{H}}_0=\hat{\mathscr{H}}_a+\hat{\mathscr{H}}_r$。

在有些问题中用相互作用绘景更方便，取

$$\overline{\Psi}_T=U\Psi_I \tag{3.112}$$

其中 $U=\exp(-\frac{\mathrm{i}\mathscr{H}_0}{\hbar}t)$ 为么正算符，Ψ_I 满足方程

$$\hat{\mathscr{H}}_I'\Psi_I=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_I}{\partial t} \tag{3.113}$$

其中 $\hat{\mathscr{H}}_I'=U^+\hat{\mathscr{H}}_IU$，相互作用绘景和薛定谔绘景中算符关系为

$$\hat{a}_j'=\hat{a}_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_jt/\hbar} \qquad \hat{b}_k'=\hat{b}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_kt}$$

得到

$$\hat{\mathscr{H}}_I'=\hbar\sum_{jk\lambda}g_{\lambda jk}(\hat{b}_\lambda^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\lambda t}+\hat{b}_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda t})\hat{a}_j^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_jt/\hbar}\hat{a}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_kt/\hbar} \tag{3.114}$$

可以看出有以下形式项出现

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_\lambda+\nu_{jk})t}$$

和

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_\lambda-\nu_{jk})t}$$

当 $\omega_\lambda\approx\omega_{jk}$，则上面一项随时间迅速按 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_\lambda t}$ 振动。相对于近似振荡项就可以忽略这项，这就是有名的转动波近似。

对于二能级原子，在相互作用绘景中，相互作用哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}}_I'=\hbar\sum_\lambda\hat{a}_1\hat{a}_2^+\hat{b}g_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_\lambda-\nu_{21})t}+h.c. \tag{3.115}$$

其中

$$g_\lambda=-\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\hbar\varepsilon_0\omega_\lambda}\right)^{1/2}\nu_{21}u_\lambda(r_0)\mathrm{d}_{12}$$

$$d_{12}=\int\Phi_2^*(r)e\vec{r}\Phi(r)\mathrm{d}^3r$$

d_{12} 是从 1→2 跃迁的偶极矩。r_0 为原子中心坐标。

在许多情况下，利用二能级原子与$\frac{1}{2}\hbar$自旋粒子在磁场中的相似性，利用泡里自旋算符代替原子能级的费米算符是比较方便的。泡里自旋算符为

$$\sigma_x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\quad \sigma_y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\quad \sigma_z=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\tag{3.116}$$

可以定义上升与下降算符

$$\sigma^+=\sigma_x+i\sigma_y \qquad \sigma^-=\sigma_x-i\sigma_y$$

它们有以下性质

$$[\sigma^+,\sigma^-]=2\sigma_z, \qquad [\sigma^\pm,\sigma_z]=\mp\sigma^\pm$$

$$\sigma^+\sigma^-+\sigma^-\sigma^+=1\tag{3.117}$$

用费米算符$\hat{a}_1,\hat{a}_2$描述的二能级原子系统可以用赝自旋算符来描述，它们的对应关系为

赝自旋算符	电子算符
σ^-	$\hat{a}_2^+\hat{a}_1$
σ	$\hat{a}_1^+\hat{a}_2$
σ_z	$\frac{1}{2}(\hat{a}_2^+\hat{a}_2-\hat{a}_1^+\hat{a}_1)$

赝自旋算符服从与电子算符同样的对易关系，在二能级系统中

$$\hat{a}_1^+\hat{a}_1+\hat{a}_2^+\hat{a}_2=1$$

注意这种类似只是形式上的。

这样二能级原子的哈密顿量可以写为

$$\mathscr{H}_0=\hbar\omega_0\sigma_z\tag{3.118}$$

现分别用$|1\rangle$和$|2\rangle$表示下能级与上能级，得到

$$\mathscr{H}_0|1\rangle=-\frac{\hbar\omega_0}{2}|1\rangle \qquad \mathscr{H}_0|2\rangle=\frac{\hbar\omega_0}{2}|2\rangle$$

在能态上，上升与下降算符作用为

$$\sigma^+|1\rangle=|2\rangle \qquad \sigma^-|2\rangle=1\tag{3.119}$$

上态存在几率为

$$\rho_{22}=\langle\sigma^{+}\sigma^{-}\rangle$$

下态存在几率为

$$\rho_{11}=\langle\sigma^{-}\sigma^{+}\rangle$$

原子反转给出为

$$\rho_{22}-\rho_{11}=2\langle\sigma_z\rangle \tag{3.120}$$

原子相干给出为

$$\rho_{21}=\langle\sigma^{-}\rangle \qquad \rho_{12}=\langle\sigma^{+}\rangle$$

在偶极近似和旋转波近似下，二能级原子与辐射场作用的哈密顿量，用赝自旋算符描述为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_I\\ \mathscr{H}_0&=\hbar\sum\omega_k b_k^{+}b_k+\hbar\omega_0\sigma_z\\ \mathscr{H}_I&=\hbar\sum_{\lambda}(g_\lambda b_\lambda\sigma^{+}+g_\lambda^{*}b_\lambda^{+}\sigma^{-})\end{aligned} \tag{3.121}$$

在单模场与原子跃迁共振时，哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_I\\ \mathscr{H}_0&=\hbar\omega b^{+}b+\hbar\omega\sigma_z\\ \mathscr{H}_I&=\hbar g(b\sigma^{+}+b^{+}\sigma^{-})\end{aligned} \tag{3.122}$$

这里取耦合常数 g 是实数，这是原子与场作用最简单形式，是有名的 Jaynes-Cummings 模型。下面将证明为何该系统的薛定谔方程在特殊情况下很容易求解，可以看出 $\mathscr{H}_0$ 和 $\mathscr{H}_I$ 是对易的

$$[\mathscr{H}_0,\mathscr{H}_I]=0 \tag{3.123}$$

这表明 $\mathscr{H}$ 的本征态可以写为 $\mathscr{H}_0$ 简并本征态的线性组合，自由哈密顿量的本征态是 $|n,2\rangle$，$|n+1,1\rangle$，其中 $|n\rangle$ 是辐射场的态，$|2\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是原子态，在旋转波近似下的相互作用哈密顿量，这两个态足以形成基矢，以这基矢线性组合表示 $\mathscr{H}_I$ 的本征态。

在相互作用绘景中薛定谔方程

$$\mathscr{H}_I\begin{bmatrix}|n & 2\rangle\\ |n+1 & 1\rangle\end{bmatrix}=\hbar\begin{bmatrix}0 & \Omega\\ \Omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|n & 2\rangle\\ |n+1 & 1\rangle\end{bmatrix} \tag{3.124}$$

其中 $\Omega=g\sqrt{n+1}$，这系统的本征值是 $\pm\hbar\Omega$，相应本征态

$$|\Phi^{+}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|n,2\rangle+|n+1,1\rangle)$$

$$|\Phi^{-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|n,2\rangle-|n+1,1\rangle) \tag{3.125}$$

设初时原子在激发态 $|2\rangle$，场在 $|n\rangle$ 态，可计算 t 时刻原子仍在 $|2\rangle$ 态，而场在 $|n\rangle$ 态的几率为

$$P_2(t)=|\langle n2|e^{-i\mathscr{H}t/\hbar}|n2\rangle|^2 \tag{3.126}$$

利用(3.125)式给出的本征态和本征态正交性质计算出

$$P_2(t)=\cos^2\Omega t \tag{3.127}$$

这就是有名的原子的拉比(Rabi)章动。式中 Ω 为拉比频率，下面考虑二能级原子与相干场的作用，它将引出一些特征的现象。

3. 量子崩坍与再生现象

二能级原子与相干态的互作用，可以通过相干态用数态展开来计算。如果原子初始在激发态，则 t 时刻也处在激发态的几率，可由下面泊松权重求和给出

$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left(1+\sum\frac{e^{-\bar{n}}\bar{n}^n}{n!}\cos 2g\sqrt{n+1}t\right) \tag{3.128}$$

由于光子数的泊松分布，在拉比频率下存在一个展宽 $\Delta n\sim n^{-1/2}$。作为拉比章动结果，在某些振荡后出现崩坍现象，这是不同余弦函数相消干涉的结果，当 $t<n^{1/2}/g$ 时一个近似求和给出

$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2g(\bar{n}+1)^{1/2}t\exp\left(-\frac{g^2t^2\bar{n}}{2(\bar{n}+1)}\right)\right] \tag{3.129}$$

这样在高斯包络下出现拉比振荡。当 $\bar{n}\gg1$ 时振荡崩坍振动的特征时间为

$$t_{col}\approx 1/g \tag{3.130}$$

崩坍出现以前，观察振动光子数是近似 $\bar{n}^{1/2}$。而再生时间通过计算得

$$t_{rev} \approx \frac{2\pi}{g} \bar{n}^{1/2}$$

近似在 $\bar{n}$ 拉比周期后，周期性拉比振荡破坏。周期性再生的存在是由于数态求和的不连续性，分立特性保证在某有限时间后，所有振动项几乎都返回彼此的位相，相干振荡再生。再生是纯量子效应，来自谐振子谱的不连续性。

崩坍与再生效应首先由 Rempe 等人在微波实验中利用单模微波场与原子的两个 Rydberg 能级间的互作用观测到的。

4. 二能级原子的自发辐射

在偶极近似和转动波近似下，二能级原子与多模辐射场作用的哈密顿量如(4.121)式所示。该哈密顿量可以写为以下形式

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \mathscr{H}_{ba} + \hbar(\sigma_+ \Gamma + \sigma_- F^+) \tag{3.131}$$

其中 $\Gamma = \Sigma g_j \hat{b}_j$，$\mathscr{H}_{ba} = \Sigma\hbar\omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k$。将辐射场看成一个能量库，它不受单光子辐射影响。可以推出原子系统在相互作用的绘景中，密度算符满足以下主方程

$$\frac{d\rho^I}{dt} = \frac{\gamma}{2}(1+\bar{n})(2\sigma^- \rho^I \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho^I - \rho^I \sigma^+ \sigma^-)$$

$$+ \frac{\gamma\bar{n}}{2}(2\sigma^+ \rho^I \sigma^{(-)} - \sigma^- \sigma^+ \rho^I - \rho^I \sigma^- \sigma^+) \tag{3.132}$$

方程描述温度为 T 时原子与热场的互作用，对于自发辐射($\bar{n}=0$)，在薛定谔绘景中

$$\frac{d\rho^S}{dt} = \frac{d\rho^I}{dt} - i\omega_0[\sigma_z, \rho] \tag{3.133}$$

$\rho_{21} = \langle\sigma^-\rangle$ 满足方程

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^-\rangle = \left(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}\right)\langle\sigma^-\rangle$$

方程解为

$$\langle\sigma^-(t)\rangle=\exp\left[\left(-\mathrm{i}\omega_0-\frac{\gamma}{2}\right)t\right]\langle\sigma^-(0)\rangle \tag{3.134}$$

原子在上态存在的几率 $P_2(t)=\rho_{22}(t)=\langle\sigma_+(t)\sigma_-(t)\rangle$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_2(t)=-\gamma P_2(t)$$

方程解为

$$P_2(t)=P_2(0)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{3.135}$$

表明初始在激发态的原子，存在指数衰减。

二次相关函数 $\langle\sigma^+(t)\sigma^-(t')\rangle$ 可以利用(3.134)式与(3.135)式计算出

$$\begin{aligned}\langle\sigma^+(t)\sigma^-(t')\rangle&=\exp\left[\left(\mathrm{i}\omega_0-\frac{\gamma}{2}\right)(t-t')\right]\langle\sigma^+(t')\sigma^-(t')\rangle\\&=\exp\left[\left(\mathrm{i}\omega_0(t-t')-\frac{\gamma}{2}\right)(t+t')\right]\langle\sigma^-(0)\sigma^-(0)\rangle\end{aligned} \tag{3.136}$$

二次相关函数可以用来寻找辐射光的谱，谱是用光子探测几率确定，单色探测器离源距离为 r，时间间隔为 T，对光频场和理想探测器，其谱为

$$S(\omega,r,T)=\frac{1}{2\pi}\int_{r/c}^{T+r/c}\mathrm{d}t_1\int_{r/c}^{T+r/c}\mathrm{d}t_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_2-t_1)}G^{(1)}(r,t_1,r,t_2) \tag{3.137}$$

其中

$$G^{(1)}(r,t_1,r,t_2)=\langle E^{(-)}(r,t_1)E^{(+)}(r,t_2)\rangle$$

谱是利用电场算符的相关函数表示的，原子算符的相关函数从主方程解产生，下面给出两者关系。在位置 r、时间 $t\gg1/\omega_0$ 时，向外传的场为

$$E^{(+)}(r,t)=E_{\text{in}}^{(+)}(r,t)-\frac{\omega_0^{\,2}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\left(\vec{\mu}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\sigma_-\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{3.138}$$

其中 $E_{\text{in}}^{(+)}(r,t)$ 是向内传的场，利用此式场的相关函数可以用原子

相关函数表示为

$$G^{(1)}(r,t,r,t') = \langle E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t')\rangle$$

$$= I_0(r)\langle\sigma_+(\hat{t})\sigma_-(\hat{t})\rangle \tag{3.139}$$

其中 $\hat{t}=t-r/c$，有

$$I_0(r) = \left| \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\vec{\mu}\times\frac{\vec{r}}{r})\times\frac{\vec{r}}{r} \right|^2$$

利用(3.136)式有

$$G^{(1)}(r,t,r,t') = I_0(\gamma)\exp\left[(\mathrm{i}\omega_0(t-t') - \frac{\gamma}{2}(t+t')\right]$$

$$\tag{3.140}$$

则(3.137)式的谱为

$$S(\omega,r,T)$$

$$= \frac{I_0(r)}{2\pi}\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^T \mathrm{d}t' \exp\left[-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t') - \frac{\gamma}{2}(t+t')\right] \tag{3.141}$$

这样记数时间 T 后给出谱

$$S(\omega,r,T) = \frac{I_0(r)}{2\pi}\frac{1+\mathrm{e}^{-\gamma T}-2\mathrm{e}^{-\gamma T}\cos(\omega-\omega_0)T}{(\omega-\omega_0)^2+(\frac{\gamma}{2})^2} \tag{3.142}$$

当 $T\to\infty$(即 $\gamma_T\gg 1$)时，上式成为

$$S(\omega,r,\infty) = \frac{I_0(\gamma)/2\pi}{(\omega-\omega_0)^2+(\frac{\gamma}{2})^2} \tag{3.143}$$

这就是熟知的半宽度为 $\gamma/2$ 的洛仑兹线型。

§3-5 量子噪声

在通信领域中，噪声是人们最关心的问题，噪声的大小决定设备的灵敏度，也决定中继距离的长短。在电磁波的低频区和光频区的噪声之间存在着根本的区别，在无线电频率范围内的噪声主要

是热噪声，它来源于分子、原子的热运动，而在红外谱以上的高频区（波长 $\lambda<30\mu m$）热噪声功率迅速地减少，但另一类噪声会增加，这就是量子噪声，它来自元件的量子效应，在光电探测器中表现为散粒噪声，在激光放大器中表现为自发辐射噪声。

本节将首先讨论热噪声，其次引入量子噪声，阐明它与热噪声的区别，然后讨论光探测器的散粒噪声和放大器中自发辐射噪声，最后介绍光子统计。

1. **热噪声**

当系统处在热平衡的情况下，在量子态 $|n\rangle$ 下找到辐射模 ω 的几率，利用波耳兹曼分布给出

$$P_n=[1-e^{-\hbar\omega/kT}]e^{-n(\hbar\omega/kT)} \tag{3.144}$$

该模的平均能量为

$$\begin{aligned}\overline{E}&=\sum_n P_nE_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\hbar\omega(n+\frac{1}{2})[1-e^{-\hbar\omega/kT}]e^{-n(\hbar\omega/kT)}\\&=\hbar\omega\left[\frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT})-1}+\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

式中第一项为热辐射平均能量，第二项为真空零点能，相应两项能量与频率 $\omega/2\pi$ 的关系如图 3.2 所示。从图中看出当频率低于 10^{12} Hz 时，热噪声能量远大于零点能量，而当频率超过 10^{13}Hz 时，零点能大于场能，零点能代表量子噪声的最小值，即表示此时量子噪声将大于热噪声。

下面讨论热噪声的功率。在一个长为 L 的归一化的立方体中，行波辐射模所携带的热功率 P 为

$$P=\frac{\overline{E}}{L}C$$

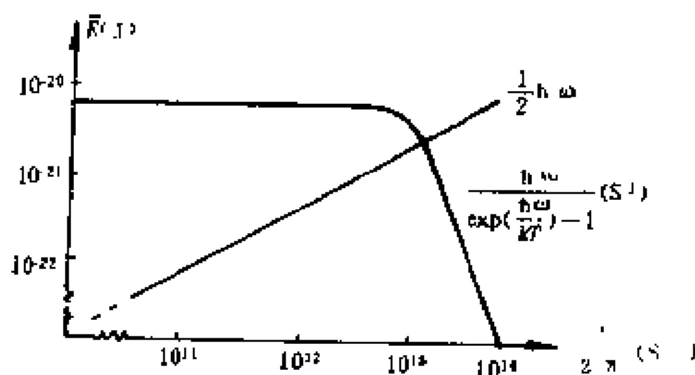


图 3.2

归一化的非物理长度 L 可由该纵模所占的频宽 $\Delta\omega$ 来表示，由于一个纵模所占有的频度为 $\Delta\omega=2\pi C/L$，则有

$$\frac{1}{L}=\frac{\Delta\omega}{2\pi C}$$

由此得到热功率为

$$P=\hbar\omega\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT})-1}+\frac{1}{2}\right] \tag{3.146}$$

在低频极限时，由于 $\hbar\omega\gg kT$，忽略零点能，热功率为

$$P=kT\frac{\Delta\omega}{2\pi} \tag{3.147}$$

(3.146)式为一个纵模的热噪声功率。下面给出在 $\Delta\omega$ 频率范围内，且在 $d\Omega$ 立体角内通过单位横截面的热噪声功率，它应是在这范围内纵模数乘每个纵模的热功率。若取归一化立方体的边长为 L，其中纵模数为

$$N=(\frac{L}{2\pi})^2k^2d\Omega=(\frac{L}{2\pi C})^2\omega^2d\Omega$$

其中，k 为波数。在立体角 $d\Omega$ 内传播的、通过单位面积的纵模数为

$$n=\frac{N}{L^2}=(\frac{\omega}{2\pi C})^2d\Omega$$

考虑到光有两个偏振方向，则在 $d\Omega$ 内通过单位面积的热噪声功

率为

$$\overline{P}=2nP=\frac{2\hbar\omega^3}{(2\pi)^3C^2}\Delta\omega\left[\frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT})-1}+\frac{1}{2}\right]d\Omega \qquad (3.148)$$

这就是有名的热辐射的普朗克公式。

2. 量子噪声

量子噪声起源于光场的量子特性，量子噪声极限由测不准关系所确定。在经典物理中没有固有的噪声，所有噪声都认为是某些噪声源引起的，原则上可以减少以致消除，但量子噪声极限受测不准关系的支配，是无法完全消除的。

考虑一个单模线偏振行波场，其电场算符可写为

$$\hat{E}(r,t)=-\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}[\hat{x}_1\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+\hat{x}_2\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)] \qquad (3.149)$$

其中 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ 是电场两个正交相振幅算符，它与 $\hat{a}$、$\hat{q}$、$\hat{P}$ 算符的关系为

$$\hat{a}=\hat{x}_1+i\hat{x}_2 \quad \hat{x}_1=\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{q} \quad \hat{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\hat{P} \qquad (3.150)$$

在压缩光的探测中常利用零差探测器来测量，这时只测量正交相振幅的一个分量。例如测量 x_1，若信号光处在相干态 $|\alpha\rangle$，$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，则测量平均值有

$$\langle x_1\rangle=\alpha_1 \qquad \langle x_1{}^2\rangle=\frac{1}{4}+\alpha_1^2$$

均方差

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle=\langle x_1{}^2\rangle-\langle x_1\rangle^2=\frac{1}{4}$$

场振幅的涨落取决于真空涨落，则单模场信噪比定义为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{nom}}=\frac{\langle q\rangle^2}{\langle(\Delta q)^2\rangle}=\frac{\langle x_1\rangle^2}{\langle(\Delta x_1)^2\rangle}=4\alpha_1^2$$

信噪比也可以用信号功率 P_S 表示，单模信号能量 E_S 为

$$E_S=\frac{1}{2}(\langle P\rangle^2+\omega^2\langle q\rangle^2)=\hbar\omega(\langle x_1\rangle^2+\langle x_2\rangle^2)$$

由于零差探测器只测量正交相两振幅中的一个。如测 x_1，则有

$$E_S=\hbar\omega\langle x_1\rangle^2=\hbar\omega\alpha_1{}^2$$

功率 P_S 与能量 E_S 关系为

$$P_S=E_S\frac{C}{L}=E_S\Delta\nu=\hbar\omega\alpha_1{}^2\Delta\nu$$

所以

$$\alpha_1{}^2=\frac{P_S}{\hbar\omega\Delta\nu}$$

则对零差探测器的信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{nom}}=\frac{4P_S}{\hbar\omega\Delta\nu} \tag{3.151}$$

由此看出它与信号功率 P_S 成正比，而与信号的频宽 $\Delta\nu$ 成反比，$\Delta\nu$ 小则信噪比高。

3. 量子计数器的信噪比

一般光信号的测量都是利用光电探测器，假定接受的光子和产生光电流中光电子之间存在一一对应关系，据此可制成光电子计数器，下面讨论它的信噪比。

在电子物理中，人们把起因于电子粒子性的噪声称为散粒效应。下面推导频率宽度为 $\Delta\nu$ 所包含散粒噪声功率的表达式。

将在光探测器中由稳定光信号产生的光电流 $i(t)$ 展成以下级数

$$i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \qquad (n\text{ 为整数})$$

式中 T 为观测电流的时间间隔，电流的直流分量由 C_0 给出，而其他系数的平均值为 0

$$\langle C_n \rangle = 0 \qquad\qquad n \neq 0$$

$$\langle C_m C_n^* \rangle = \langle |C_n|^2 \rangle \delta_{nm}$$

平均光电流

$$\langle i(t) \rangle = \langle C_0 \rangle = C_0$$

由于电流是实数，故 $i(t) = i^*(t)$，电流平方的平均值为

$$\langle i^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle C_n C_m^* \rangle e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t}$$

$$= \sum_n \langle |C_n|^2 \rangle \tag{3.152}$$

若用一个滤波器作用在光电流上，滤波器只通过 $\omega_i = (\frac{2\pi}{T})i$ 到 $\omega_j = (\frac{2\pi}{T})j$ 的频率，频率宽度

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}(j-i)$$

通过滤波器的电流平方的平均值为

$$\langle i^2 \rangle_{\Delta\nu} = 2\sum_{n=i}^{j} \langle |C_n|^2 \rangle$$

式中因子 2 来源于 $C_{-n} = C_n^*$，如果电流的直流部分被滤波器滤除，则通过滤波器的电流就是电流的平均平方涨落，有

$$\langle (\Delta i)^2 \rangle = \langle i^2 \rangle_{\Delta\nu}$$

为了进一步计算电子电流的平均平方涨落，必须对电流的特性作些假定。假定电流是由单个电子产生的分立脉冲构成的，真实电流脉冲的脉宽等于电子从光电管的阴极到阳极的渡越时间，这时间很短，近似用 δ 函数表示

$$i(t) = e\sum_n \delta(t - \tau_n)$$

假定在时间 T 内有 N 个电子对电流有贡献，则平均电流

$$\langle i \rangle = \frac{eN}{T}$$

而系数

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i(t)\mathrm{e}^{-i\left(\frac{2\pi}{T}\right)nt}\mathrm{d}t = \frac{e}{T}\sum_{k}\mathrm{e}^{-i\left(\frac{2\pi}{T}\right)n\tau_k}$$

振幅平方的系综平均值为

$$\langle |C_n|^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2}\sum_{m}\sum_{l}\langle [\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}n(\tau_l - \tau_m)}]\rangle$$

$$= \frac{e^2}{T^2}\sum 1 = N\frac{e^2}{T^2} = \frac{e}{T}\langle i \rangle \tag{3.153}$$

显示$\langle |C_n|^2 \rangle$与 n 无关，则

$$\langle (\Delta i)^2 \rangle = 2\sum_{n=i}^{j}\langle |C_n|^2 \rangle = 2(j-i)\langle |C_n|^2 \rangle$$

$$= 2e\langle i \rangle\frac{j-i}{T} = 2e\langle i \rangle\Delta\nu \tag{3.154}$$

上式将光电流的均方涨落同平均电流和滤波器的频宽联系起来。由于功率正比于电流的平方，因此$\langle (\Delta i)^2 \rangle$将正比于在频率间隔 $\Delta\nu$ 内散粒噪声的功率。下面确定由散粒噪声产生的信噪比。

下面的分析是基于光电子效应。设光束每秒打在光电管阴极上有 n 个光子，每个光子产生 η 个电子($\eta \leqslant 1$)，光电流

$$i = e\eta n$$

η 称光量子效率，光功率与光子数的关系为

$$P = n\hbar\omega$$

则有

$$i = \frac{e\eta}{\hbar\omega}P \tag{3.155}$$

下面给出光量子计数器的信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{q} = \frac{\mathrm{i}^2}{\langle (\Delta i)^2 \rangle} = \frac{\mathrm{i}}{2e\mathrm{i}\Delta\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2e\Delta\nu} = \eta\frac{P_S}{2\hbar\omega\Delta\nu} \tag{3.156}$$

与零差探测器的信噪比$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{hom}} = 4P_S/\hbar\omega\Delta\nu$ 比较，光电子计数器的信噪比要低一些。

4. 光放大器的噪声

随着掺铒光纤放大器的研制成功，一个全光通信的前景已展望在人们眼前，放大器的噪声将是人们十分关注的问题。放大器噪声大小可以用噪声因子来描述，定义放大器噪声因子 F 为

$$F=\frac{(S/N)_{\text{in}}}{(S/N)_{\text{out}}} \tag{3.157}$$

$(S/N)_{\text{in}}$为放大器输入信噪比，$(S/N)_{\text{out}}$为输出信噪比。根据前面讨论，输入信噪比可取

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}}=\frac{P_S}{\hbar\omega\Delta\nu}$$

则

$$F=\frac{P_S/\hbar\omega\Delta\nu}{(S/N)_{\text{out}}} \tag{3.158}$$

对任何放大器有以下定理：在任何装置的输出端的信噪比都不可能大于输入端的信噪比，即

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}\leqslant\frac{P_S}{\hbar\omega\Delta\nu} \tag{3.159}$$

$\Delta\nu$ 为辐射模占有的频宽。这一定理可以用反证法来证明。若定理不成立，放大器输出信噪比可以大于输入端信噪比，则可以利用放大器使信噪比高于测不准关系确定的量子极限，但这是不可能的，因此放大器的噪声因子应当满足 $F\geqslant1$，定理得证。

设放大器的增益为 G，若放大器不引入新的噪声，则有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}=\frac{GP_S}{\hbar\omega\Delta\nu}$$

则噪声因子 $F=\frac{1}{G}<1$，这是不可能的，因此放大器本身必定会产生附加噪声，取放大器本身噪声为 N_a，则有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}=\frac{GP_S}{\hbar\omega\Delta\nu+N_a}$$

若取 $F=1$，则

$$N_a=(G-1)\hbar\omega\Delta\nu$$

因此在正常情况下

$$N_a \geqslant (G-1)\hbar\omega\Delta\nu \qquad (3 \cdot 160)$$

放大器的最小噪声为放大器的自发辐射噪声，探测器的量子噪声极限是场的真空涨落引起的，这真空涨落总是存在而不会被放大或衰减，但放大器的自发辐射噪声可以被后面的放大器进一步放大。

5. 光子统计

光信号的检测过程是基于光电变换进行的，其基本的物理过程是光电效应，即在光电管的光敏面吸收了光子而产生光电子，若光信号具有确定的光子数，引出接收器的电子数基本上有确定的值，但是人工产生光子数确定态的技术目前还没有，对应确定的能量产生的光子数将存在一个分布。

我们使用的光源有的为相干态，如半导体激光器、He-Ne 激光器等，也有的是非相干态，如发光二极管、电灯等。所有这些光源光子数都不是确定的，分析光源光子数分布的问题就叫作光子统计。光子数分布会对信号的信噪比带来影响。

光子数服从的几率分布可以从任意量子态出发，用光子数确定态的展开来决定，对于相干态

$$\begin{aligned} P(n) &= T_r |\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle\langle n| \\ &= |\langle n|\alpha\rangle|^2 \\ &= \frac{|\alpha^2|^n}{n!}e^{-|\alpha|^2} = \frac{\bar{n}^n}{n!}e^{-\bar{n}} \end{aligned}$$

即为泊松分布。当任意光的量子态用 Glauber P 表述时，光子数统计分布为

$$P(n) = T_r\iint P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha|n\rangle\langle n|$$

$$=\iint P(\alpha)\,|\langle n|\alpha\rangle|^2\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\iint P(\alpha)\,\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}e^{-|\alpha|^2}\mathrm{d}^2\alpha$$

对于热场其 P 表示为 Gauss 函数，相应密度矩阵为

$$\rho=\iint P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi N}\iint\exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{N}\right]|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha$$

其光子数分布为

$$P(n)=T_r\rho|n\rangle\langle n|$$

$$=\frac{1}{\pi N}\iint\exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{N}\right]\langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi N n!}\iint(|\alpha|^2)^n\exp\left[-\frac{1+N}{N}|\alpha|^2\right]\mathrm{d}^2\alpha$$

$$=\frac{N^n}{(1+N)^{n+1}}$$

即为 Bose-Einstein 分布，分布的平均值和方差为

$$\langle n\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}nP(n)=N$$

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-\langle n\rangle^2P(n)=N(1+N)$$

显然它高于相干态的方差。

为评价光子统计的特性，常比较不同场的二阶相关函数

$$g^{(2)}=\frac{\langle n(n-1)\rangle}{\langle n\rangle^2}$$

对于相干态，光子数服从泊松分布，其

$$g^{(2)}-\frac{\langle n\rangle^2}{\langle n\rangle^2}-1$$

对于热场，光子数服从 Bose-Einstein 分布，其

$$g^{(2)}=\frac{2\langle n\rangle^2}{\langle n\rangle^2}=2$$

当 $g^{(2)}>1$ 为聚束场，表现为光子到达的同时性大。当 $g^{(2)}<1$ 为反聚束效应，$g^{(2)}=1$ 为非聚束性。

习　　题

3.1 利用谐振量子化相似的步骤，对单模电磁场进行量子化，给出 $\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})$。

3.2 取位相算符本征态

$$|\Phi\rangle=\lim_{S\to\infty}(S+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{S}\exp(in\Phi)|n\rangle$$

证明 (1) $\langle\Phi|\Phi\rangle=1$

(2) 当 $S\to\infty$ 时 $\cos\hat{\Phi}|\Phi\rangle=\cos\Phi|\Phi\rangle$

3.3 试说明相干态是真空态的平移态。

3.4 试利用相干态的定义式证明在相干态中

(1) 平均光子数 $\bar{n}=|\alpha|^2$。

(2) 光子数分布为泊松分布

$$P_n(\alpha)=\frac{\bar{n}^n}{n!}e^{-\bar{n}}$$

3.5 证明相干态满足关系

$$\langle\alpha|\beta\rangle=\exp[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha^*\beta)]$$

表明它们是不正交的。

3.6 试证明对于热场的 P 表示为

$$P(\alpha)=\frac{1}{\pi\bar{n}}\exp(-|\alpha-\alpha_0|^2/\bar{n})$$

3.7 光子数态 $|n\rangle$ 的复 P 表示为

$$P(\alpha,\beta)=-\frac{1}{4\pi^2}e^{\alpha\beta}\frac{n!}{(\alpha\beta)^{n+1}}$$

试证明

$$\langle\hat{a}^{+}\hat{a}\rangle=\oint d\alpha d\beta\alpha\beta P(\alpha,\beta)=n$$

3.8 若单模场与一、二能级原子互作用的哈密顿量为

$$\mathscr{H}_1=\hbar\Delta\sigma_z+\hbar g(\hat{b}\sigma^{-}+\hat{b}^{+}\sigma^{+})$$

其中 $\Delta=\omega_a-\omega_f$ 是原子与场间频率差，试求它相应的本征态。

3.9 已知二能级 dressed 原子的哈密顿量为

$$\mathscr{H}_5=\hbar(n+\frac{1}{2})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}\delta & 2g\sqrt{n+1}\\ 2g\sqrt{n+1} & -\delta\end{bmatrix}$$

试求它的能量本征值和相应本征态。

参 考 文 献

〔1〕郭光灿. 量子光学. 高等教育出版社,1990.

〔2〕Cohen Tannoudji et al. Photon and atoms, introduction to quantum Electrodynamics. Wiley. New York, 1989.

〔3〕E. A. Power. Introductory quantum electrodynamics. Longmans, London, 1964.

〔4〕D. F. Walls, G. J. Milburn. Quantum optics. Springer Verlag. Berlin, 1994.

第四章　量子光学的热库理论

在上一章讨论了辐射场的量子化及辐射场与原子系统作用，没有考虑系统的能量损失，当系统有能量损失时如何处理呢？在量子光学中，通常采用热库理论，即将光场或原子或光场与原子看成系统，并将该系统能量的损失认为是与外界作用的结果，这作用外界比较大，但对其状态一般不加细致研究，只认为其自由度远比系统多，因此称为热库。处理热库与系统的互作用常有两种方法，一是在相互作用绘景或薛定谔绘景中，将整个体系的密度算符方程对热库变数求迹，给出系统约化密度算符主方程，将热库变数消去，然后利用密度算符的准几率表示，将主方程转化为C数的福克-普朗克方程，最后求解；二是在海森堡绘景中通过噪声算符将热库作用转变为随机力，引入量子的朗之万方程，然后再求解。

本章先介绍密度算符主方程和福克-普朗克方程，然后介绍朗之万方程。

§4-1　密度算符的主方程

考虑系统哈密顿量为 $\hat{\mathscr{H}}_S$，热库哈密顿量为 $\hat{\mathscr{H}}_R$，热库是一个大自由度系统，它可以是大量谐振子系统，也可以是大量二能级原子系统，一般主方程推导与具体热库模型无关，系统与热库间存在弱作用，哈密顿量为 $\hat{V}$，则总哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_S + \hat{\mathscr{H}}_R + \hat{V} \tag{4.1}$$

取 $\hat{\rho}_T(t)$ 是在相互作用绘景中系统与热库总的密度算符，在相

互作用绘景中，运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_T(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{V}(t),\hat{\rho}_T(t)] \tag{4.2}$$

对热库变数求迹，给出系统的约化密度算符为

$$\hat{\rho}(t) = Tr_R[\hat{\rho}_T(t)] \tag{4.3}$$

假定初始系统与热库无关联，取

$$\hat{\rho}_T(0) = \hat{\rho}(0) \times \hat{\rho}_R$$

其中 $\hat{\rho}_R$ 是热库的密度算符，将方程(4.2)式积分得

$$\hat{\rho}_T(t) - \hat{\rho}_T(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t_1[\hat{V}(t_1),\hat{\rho}_T(t_1)]$$

取迹得到

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t_1 Tr_R[\hat{V}(t_1),\hat{\rho}_T(t_1)] \tag{4.4}$$

利用递推法，一级近似，取积分中 $\hat{\rho}_T(t_1) = \hat{\rho}(0) \times \hat{\rho}_R$ 得

$$\hat{\rho}_1(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t_1 Tr_R[\hat{V}(t_1),\hat{\rho}(0) \times \hat{\rho}_R] \tag{4.5}$$

将(4.5)式代入(4.4)式右边，给出二级近似为

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t_1 Tr_R[\hat{V}(t_1),\hat{\rho}(0) \times \hat{\rho}_R]$$
$$- \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 Tr_R[\hat{V}(t_1),[\hat{V}(t_2),\hat{\rho}(0) \times \hat{\rho}_R]]$$

若 $\hat{V}(t)$ 满足 $Tr_R(\hat{V}(t)\hat{\rho}_R) = 0$，上式右边第二项为 0，$\hat{\rho}(t)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} = - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \mathrm{d}t_1 Tr_R[\hat{V}(t),[\hat{V}(t_1),\hat{\rho}_R \otimes \hat{\rho}(t)]] \tag{4.6}$$

下面讨论阻尼谐振子系统。这时

$$\hat{\mathscr{H}}_S = \hbar\omega_0\hat{a}^+\hat{a}$$

$$\hat{\mathscr{H}}_R = \sum_j \hbar\omega_j\hat{b}_j^+\hat{b}_j$$

$$\hat{V}(t) = \hbar\sum_j[g_j \cdot \hat{a}^+\hat{b}_j \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega_j)t}$$

$$+ g_j^* \hat{a}\hat{b}_j^+ e^{i(\omega_0-\omega_j)t}] \tag{4.7}$$

将(4.7)式代入(4.6)式，会出现以下四项积分

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t dt_1 \sum_{i,j} g_i g_j \langle \hat{b}_i \hat{b}_j \rangle e^{-i(\omega_j t + \omega_i t_1)} e^{i\omega_0 (t+t_1)} \\
I_2 &= \int_0^t dt_1 \sum_{i,j} g_i g_j^* \langle \hat{b}_i \hat{b}_j^+ \rangle e^{i\omega_j t_1 - i\omega_i t} e^{i\omega_0 (t-t_1)} \\
I_3 &= \int_0^t dt_1 \sum_{i,j} g_i^* g_j^* \langle \hat{b}_i^+ \hat{b}_j^+ \rangle e^{i(\omega_j t + \omega_i t_1)} e^{-i\omega_0 (t+t_1)} \\
I_4 &= \int_0^t dt_1 \sum_{i,j} g_i g_j^* \langle \hat{b}_i^+ \hat{b}_j \rangle e^{i(\omega_i t + \omega_j t_1)} e^{-i\omega_0 (t-t_1)}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

由于热库具有很大的自由度，并包括各种频率，故对模式求和变为频率积分

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega_i}{2\pi} \rho(\omega_i) \int_0^\infty \frac{d\omega_j}{2\pi} \rho(\omega_j) g(\omega_i) g(\omega_j) \\
\cdot \langle \hat{b}(\omega_i) \hat{b}(\omega_j) \rangle_R \, e^{-i(\omega_i t + \omega_j t_1) + i\omega_0 (t+t_1)}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

其中 $\rho(\omega)$ 是态密度函数。对于热库，位相有关相关函数 $\langle \hat{b}(\omega_i)\hat{b}(\omega_j) \rangle_R = 0$，但对一些特别热库，如压缩热库不能存在位相相关，为此取

$$\langle \hat{b}(\omega_i)\hat{b}(\omega_j) \rangle = 2\pi \mathbf{M}(\omega) \delta(2\omega_0 - \omega_i - \omega_j) \tag{4.10}$$

因此如果取 $\omega_i = \omega$，则 $\omega_j = 2\omega_0 - \omega$，(4.9)式成为

$$I_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega) \rho(2\omega_0 - \omega) g(\omega) g(2\omega_0 - \omega) \mathbf{M}(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)(t-t_1)}$$

这时积分与 $t - t$ 有关，取 $\tau = t - t_1$，得

$$I_1 = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega) \rho(2\omega_0 - \omega) g(\omega) g(2\omega_1 - \omega) \mathbf{M}(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} \tag{4.11}$$

下面取马尔可夫(Markov)近似。假定 $\rho(\omega)g(\omega)$ 与 $\mathbf{M}(\omega)$ 都是在 $\omega = \omega_0$ 附近的慢变化函数，对 τ 积分它们不变，这时利用

$$\int_0^\infty d\tau e^{-i\varepsilon\tau} = \pi\delta(\varepsilon) - iP\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{4.12}$$

式中 P 是柯西主值积分。取 $\varepsilon=\omega-\omega_0$，则积分

$$I_1=\int_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\rho^2(\varepsilon+\omega_0)g^2(\varepsilon+\omega_0)\mathrm{M}(\varepsilon+\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\tau}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\rho^2(\varepsilon+\omega_0)g^2(\varepsilon+\omega_0)M(\varepsilon+\omega_0)\left[\pi\delta(\varepsilon)-\mathrm{i}P\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

如定义衰减率为 γ，则

$$\gamma=\rho^2(\omega_0)g^2(\omega_0)$$

得

$$I_1=\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}(\omega_0)+\mathrm{i}\Delta_1 \tag{4.13}$$

$$\Delta_1=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\rho^2(\varepsilon+\omega_0)g^2(\varepsilon+\omega_0)\mathrm{M}(\varepsilon+\omega_0)$$

Δ 表示振荡频率微小位移，一般可以忽略。类似地可以推出

$$I_2=\frac{\gamma}{2}(\mathrm{N}(\omega_0)+1)-\mathrm{i}\Delta_2$$

$$I_3=\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}^*(\omega_0)-\mathrm{i}\Delta_1 \tag{4.14}$$

$$I_4=\frac{\gamma}{2}\mathrm{N}(\omega_0)-\mathrm{i}\Delta_4$$

其中函数 $\mathrm{N}(\omega_0)$ 定义为

$$\langle\hat{b}^+(\omega_0)+\hat{b}(\omega)\rangle=2\pi\mathrm{N}(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0) \tag{4.15}$$

将以上结果代回(4.6)式，可给出系统密度算符的发展方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}=&\frac{\gamma}{2}(\mathrm{N}+1)(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a})\\&+\frac{\gamma}{2}\mathrm{N}(2\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^+\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^+)\\&+\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}(2\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}^+)\\&+\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}^*(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}\hat{a})\end{aligned} \tag{4.16}$$

若库处在平衡态，温度为 T，$\mathrm{M}=0$，且

$$\mathrm{N}(\omega_0)=(\mathrm{e}^{\hbar\omega_0/kT}-1)^{-1}$$

这时方程可以大大简化，特别取热库 $T=0$ 时，$\mathrm{N}=0$，则方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a}) \tag{4.17}$$

一般情况，密度算符是正的，要求 $(|\mathrm{M}|^{2}\leqslant \mathrm{N}(\mathrm{N}+1)$。方程(4.16)式是在相互作用绘景中，阻尼谐振子的主方程。如果振子受到另外作用 $\hat{\mathscr{H}}_{1}$，则得到在薛定谔绘景中的主方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=&-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}_{0}+\hat{\mathscr{H}}_{1},\hat{\rho}]\\&+\frac{\gamma}{2}(\mathrm{N}+1)(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a})\\&+\frac{\gamma}{2}\mathrm{N}(2\hat{a}^{+}\hat{\rho}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^{+})\\&-\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}(2\hat{a}^{+}\hat{\rho}\hat{a}^{-}-\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a}^{+})\\&-\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}^{*}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}\hat{a})\end{aligned} \tag{4.18}$$

在一般情况下，平均振幅和平均量子数的运动方程不太容易从(4.18)式得到，而必须转化为C数的偏微分方程，这必须将方程在相干态中展开，将在下节介绍。

主方程在数态基矢中可以等价的矩阵元方程，取 $\rho_{mn}=\langle m|\rho|n\rangle$，其变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{mn}}{\partial t}=&\gamma\mathrm{N}[(nm)^{1/2}\rho_{m-1,n-1}-\frac{1}{2}(m+n+2)\rho_{mn}]\\&+\gamma(\mathrm{N}+1)\{[(m+1)(n+1)]^{1/2}\rho_{m+1,n+1}\\&-\frac{1}{2}(m+n)\rho_{mn}\}-\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}\{2[m(n+1)]^{1/2}\rho_{m-1,n+1}\\&-\sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{m,n+2}-\sqrt{m(m-1)}\rho_{m-2,n}\}\\&-\frac{\gamma}{2}\mathrm{M}^{*}\{2[n(m+1)]^{1/2}\rho_{m+1,n-1}\\&-\sqrt{(m+1)(m+2)}\rho_{m+2,n}-\sqrt{n(n-1)}\rho_{m,n-2}\}\end{aligned} \tag{4.19}$$

当热库处在平衡态，$\mathbf{M}=0$，则非对角元素为0，则仅存在对角元素，形成对角元素方程链，取 $\rho(n)=\langle n|\rho|n\rangle$，其变化满足方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho(n)}{\mathrm{d}t} &= T_{+}(n-1)\rho(n-1) \\ &\quad + T_{-}(n+1)\rho(n+1) \\ &\quad - [T_{+}(n)+T_{-}(n)]\rho(n)\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 T_{+} 与 T_{-} 为跃迁几率

$$T_{+}(n)\equiv\gamma\mathbf{N}(n+1)$$

$$T_{-}(n)\equiv\gamma(\mathbf{N}+1)n$$

在稳态情况下，有细致平衡原理

$$T_{-}(n)\rho(n)=T_{+}(n-1)\rho(n-1)$$

利用迭代方法可得到稳态解

$$\rho_{S}(n)=\rho(o)\prod_{j=1}^{n}\frac{T_{+}(j-1)}{T_{-}(j)}$$

如此阻尼谐振子稳态分布为

$$\rho_{S}(n)=\frac{1}{1+N}\left(\frac{N}{1+N}\right)^{n} \tag{4.21}$$

这是通常的 Boltzmann 分布

§4-2　福克-普朗克方程

从上节讨论看出，当在稳定平衡时 $M=0$，可以利用光子数表象给出密度矩阵 ρ，但当 $M\neq0$ 或由于附加作用引起对角项与非对角项耦合时，就不宜用光子数表象。这时必须利用相干态展开，将算符方程改变为C数的微分方程。如上章介绍也有多种表示方法，先介绍P表示。

1. P表示

取相干态为 $|\alpha\rangle$，它是湮灭算符的本征态

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

密度算符 $\hat{\rho}$ 的 Glauber-SudarshanP 表示为

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha)$$

引入 Bargmann 相干态 $\|\alpha\rangle$ 定义为

$$\|\alpha\rangle = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

则 P 表示为

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha \|\alpha\rangle\langle\alpha\| e^{-|\alpha|^2} P(\alpha)$$

以致

$$\hat{a}^+ \|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1}|n+1\rangle = \frac{\partial}{\partial\alpha}\|\alpha\rangle$$

相似有

$$\langle\alpha\|\hat{a} = \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\alpha\|$$

以致得到

$$\hat{a}^+ \hat{\rho} = \int d^2\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}(\|\alpha\rangle\langle\alpha\|) e^{-|\alpha|^2} P(\alpha)$$

利用分部积分得

$$\hat{a}^+ \hat{\rho} = \int d^2\alpha \|\alpha\rangle\langle\alpha\| e^{-|\alpha|^2}(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}) P(\alpha)$$

这显示当 $\hat{\rho} \to \hat{\rho}(\alpha)$ 时，$\hat{a}^+ \hat{\rho}$ 具有以下对应关系

$$\hat{a}^+ \hat{\rho} \to (\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}) P(\alpha) \qquad (4.22\text{ a})$$

相似的给出以下对应关系

$$\hat{a}\hat{\rho} \to \alpha P(\alpha)$$

$$\hat{\rho}\hat{a} \to (\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}) P(\alpha) \qquad (4.22\text{ b})$$

$$\hat{\rho}\hat{a}^+ \to \alpha^* P(\alpha)$$

并可以给出算符乘积对应关系

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho} &\to (\alpha^{*} - \frac{\partial}{\partial\alpha})P(\alpha) \\
\hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a} &\to (\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}})\alpha^{*}P(\alpha)
\end{aligned}
\tag{4.22 c}
$$

将这些关系应用于(4.16)式,可以引出 P 表示的福克-普朗克方程

$$
\frac{\partial P(\alpha)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}\alpha^{*}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(M^{*}\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha^{*2}} + M\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha^{2}}\right) + \gamma N\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right]P(\alpha) \tag{4.23}
$$

注意 α 与 α^{*} 不是完全独立变数,它们是复数,可以写成实变数情况。引入

$$
\alpha = x + iy \qquad \alpha^{*} = x - iy
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

则方程(4.23)式可以变为

$$
\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{N}{2}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\right]P \tag{4.24}
$$

其中取 $M = M^{*} = 0$,取 $\hat{\mathscr{H}}_{0} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$。在薛定谔绘景中主方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} = &- i\omega[\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{\rho}] \\
&+ \frac{1}{2}\gamma(N + 1)(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a}) \\
&+ \frac{1}{2}\gamma N(2\hat{a}^{+}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{+}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^{-})
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

相应 P 表示的福克-普朗克方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} = &\left[\frac{1}{2}\gamma(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}\alpha^{*}) \right. \\
&\left. - i\omega(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}\alpha^{*}) + \gamma N\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}\right]P
\end{aligned}
$$

利用实变数表示为

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)+\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}y-\frac{\partial}{\partial y}x\right)+\frac{\mathrm{N}}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]P \tag{4.26}$$

2. 福克-普朗克方程的性质

n 个变数的福克-普朗克方程形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}P=\left[-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}A_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij}\right]P \tag{4.27}$$

式中等号右边第一项为位移项，决定平均运动，第二项为扩散项，它引起 P 的加宽，A_i 为位移矢量，D_{ij} 是扩散矩阵。变数平均值满足

$$\frac{\mathrm{d}\langle x_k\rangle}{\mathrm{d}t}=\langle A_k\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle x_k x_l\rangle}{\mathrm{d}t}=\langle x_k A_l\rangle+\langle x_l A_k\rangle+\frac{1}{2}\langle D_{kl}+D_{lk}\rangle$$

如此对阻尼谐振子有

$$\frac{\partial\langle\alpha\rangle}{\partial t}=-\frac{\gamma}{2}\langle\alpha\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle\alpha^*\alpha\rangle}{\mathrm{d}t}=-\gamma\langle\alpha^*\alpha\rangle+\gamma N \tag{4.28}$$

则方程解为

$$\langle\alpha\rangle=\langle\alpha(0)\rangle\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

在薛定谔绘景中

$$\langle\alpha(t)\rangle=\langle\alpha(0)\rangle\mathrm{e}^{-\gamma t/2}\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

这意味振幅衰减率为 $\gamma/2$，平均量子数 $\langle n\rangle=\langle\alpha^*\alpha\rangle$

$$\langle n(t)\rangle=\langle n(0)\rangle\mathrm{e}^{-\gamma t}+\mathrm{N}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})$$

在稳定态 $\langle n(t)\rangle\to N$，即振荡器中平均量子数将趋向同温度下热库的量子数。

在稳态时，有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-A_i P+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij}P\right]=0$$

一种可能结果为

$$A_i P=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij}P$$

这意味着

$$D_{ij}\frac{\partial \ln P}{\partial x_j}=2A_i-\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$

若令 $P=\exp(-\Phi)$，则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=2(D^{-1})_{ij}\left[A_j-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial x_k}\right]\equiv F_i \qquad (4.29)$$

考虑 F_i 为广义力，Φ 相应于势，上式如能积分求解，则要求满足势条件

$$\frac{-\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{-\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_i}$$

从(4.29)式给出

$$\Phi(x)=\int_0^x 2(D^{-1})_{ij}\left[-A_j+\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial x_k}\right]\mathrm{d}x_i \qquad (4.30)$$

则 P 表示为

$$P(x)=N\exp[-\Phi(x)]$$

当位移项为 x 的线性函数，扩散系数为常数，福克 - 普朗克方程可以用 Green 函数方法求解。这时方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\sum_i A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i P)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\partial x_j}$$

取初始条件 $P(x_i,0)=\delta(x_i-x_i^0)$ 得到解

$$P(x_i,x_i^0,t)=\frac{1}{\pi^{n/2}[\det\sigma_{ij}(t)]^{1/2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\sum_{i,j}\sigma_{ij}(t)^{-1}\{[x_i-x_i^0\exp(A_i,t)][x_j-x_j^0\exp(A_j,t)]\}\right\}$$

(4.31)

其中

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{-2D_{ij}}{A_i + A_j}\{1 - \exp[(A_i + A_j)t]\}$$

对于阻尼谐振子，初始在相干态

$$P(\alpha,0) = \delta^2(\alpha - \alpha_0)$$

相应解为

$$P(\alpha,t) = \frac{1}{\pi N(1 - e^{-\gamma t})}\exp\left(\frac{-|\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}|^2}{N(1 - e^{-\gamma t})}\right) \qquad (4.32)$$

这表示当系统初始在相干态时，由热库的弛豫作用，相干振幅减少，热库引起涨落，使 P 函数趋向高斯型，分布宽度增加直到与热库平衡。

当热库为压缩态时，P 表示将是奇异的，这时需要用其他的表示。

3. Q 表示

上章指出 Q 表示为密度算符在相干态中对角矩阵元

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$$

为给出 Q 表示的 C 数方程，涉及算符乘积的对角矩阵元，为此将利用以下公式

$$[\hat{a}, f(\hat{a}\hat{a}^+)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^+}$$

$$[\hat{a}^+, f(\hat{a}\hat{a}^+)] = -\frac{\partial f}{\partial \hat{a}} \qquad (4.33)$$

得到

$$\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a} = \hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} - [\hat{a}^+\hat{\rho}]\hat{a}$$

$$= \hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} + \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{a}}\hat{a}$$

取相干态中对角矩阵元

$$\langle\alpha|\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha\langle\alpha|\hat{a}^+\hat{\rho} + \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{a}}|\alpha\rangle$$

$$= (|\alpha|^2 + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}) Q(\alpha)$$

类似也可以给出阻尼谐振子主方程中其他各项而得到以下Q表示的C数方程。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\alpha^*\right)Q + \frac{\gamma}{2}\left[M^* \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + M \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2(N+1)\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}\right]Q \tag{4.34}$$

这与P表示C数方程不同的是扩散项中用N + 1代替N，以保证当势库在压缩态时有正定的扩散矩阵。为显示Q表示方程的应用，考虑一个压缩态与零温度热库(N = M = 0)的耦合，这时方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\alpha^*\right)Q + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}Q \tag{4.35}$$

初始处在相干压缩态 $|\alpha_0 r\rangle$，利用 Green 函数解上方程，给出

$$Q(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\sigma(t)}}\exp\left[-\frac{1}{2}A^T\sigma^{-1}A\right]$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \alpha_0 e^{-\gamma t/2} \\ \alpha^* - \alpha_0^* e^{-\gamma t/2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\sinh 2r & \cosh 2r + 1 \\ \cosh 2r + 1 & -\sinh 2r \end{pmatrix}\frac{e^{-\gamma t}}{2}$$

其正交相振幅 x_1 与 x_2 的方差为

$$V(x_1) = \frac{1}{4}[(e^{-2r} - 1)e^{-\gamma t} + 1]$$

$$V(x_2) = \frac{1}{4}[(e^{2r} - 1)e^{-\gamma t} + 1]$$

当 $t = 0$ 时，x_1 与 x_2 方差不相等，当 $t \to \infty$ 时两边方差相等，与零温热库相同。

4. 维格纳表示

在有些情况下可以通过维格纳表示，将算符主方程转变为C数的福克 - 普朗克方程，推导中利用特征函数比较方便。

$$\chi(\eta) = T_r\{e^{\eta a^+ - \eta^* a}\hat{\rho}] = T_r[\hat{D},\hat{\rho}]$$

对 $\chi(\eta)$ 的方程可以利用

$$\frac{\partial \chi(\eta)}{\partial t} = T_r\{D\frac{\partial \rho}{\partial t}\}$$

利用算符 Glauber 公式，可写出

$$D = e^{-|\eta|^2/2}e^{\eta \hat{a}^+}e^{-\eta^* \hat{a}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}D = -\frac{\eta^*}{2}D + \hat{a}^+ D$$

得到

$$\hat{a}^+ D = (\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\eta^*}{2})D$$

类似地可以写出

$$D\hat{a} = (-\frac{\eta}{2} - \frac{\partial}{\partial \eta^*})D$$

利用 D 的反常序表示

$$D = e^{|\eta|^2/2}e^{-\eta^* \hat{a}}e^{\eta \hat{a}^+}$$

可以得到

$$D\hat{a}^+ = (\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\eta^*}{2})D$$

$$\hat{a}D = (\frac{\eta}{2} - \frac{\partial}{\partial \eta^*})D$$

将这些规则用于主方程(4.16)式，可以给出特征函数方程

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}(1 - |\eta|^2 - \eta^*\frac{\partial}{\partial \eta^*} - \eta\frac{\partial}{\partial \eta})\chi - \gamma \mathbf{N}|\eta|^2\chi$$
$$- \frac{\gamma}{2}\mathbf{M}(\eta^*)^2\chi - \frac{\gamma}{2}\mathbf{M}^*\eta^2\chi \tag{4.36}$$

而相应维格纳函数的方程，可以从(4.36)式的富氏变换得到，由

$$W(\alpha)=\int e^{\eta^*\alpha-\eta\alpha^*}\chi(\eta)d^2\eta$$

$$\int e^{\eta^*\alpha-\alpha^*\eta}|\eta|^2\chi(\eta)d^2\eta=-\int\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(e^{\eta^*\alpha-\alpha^*\eta})\chi(\eta)d^2\eta$$

$$=-\frac{\partial^2W(\alpha)}{\partial\alpha\partial\alpha^*}$$

$$\int e^{\eta^*\alpha-\alpha^*\eta}\frac{\partial}{\partial\eta^*}\chi(\eta)d^2\eta=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int e^{(\eta^*\alpha-\alpha^*\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta^*}\chi(\eta)d^2\eta$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\chi(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta^*}e^{(\eta^*\alpha-\alpha^*\eta)}d^2\eta$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha W(\alpha)]$$

则得到维格纳函数的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\gamma}{2}(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^*)W$$

$$+\frac{\gamma}{2}[M^*\frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}+M\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2(N+\frac{1}{2})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}]W \tag{4.37}$$

这与P表示方程比较，其不同点在扩散项用$\gamma(N+\frac{1}{2})$代表γN，增加$\frac{\gamma}{2}$以保方程有正定扩散。

5. 复P表示

在非线性问题中，我们会发现有些系统既给不出Q表示与维格纳表示的福克-普朗克方程，也找不到稳定的Glauber-Sndarshan P表示的解，在这种情况下，有时可以利用复P表示给出福克-普朗克方程的稳定解。

上章已给出复P表示定义

$$\hat{\rho}=\int_D\Lambda(\alpha,\beta)P(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$

其中 $\Lambda(\alpha,\beta)$ 为非对角相干态投影算符

$$\Lambda(\alpha,\beta)=\frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle}$$

下面一些等式成立

$$\hat{a}\Lambda(\alpha,\beta)=\alpha\Lambda(\alpha,\beta)$$

$$\hat{a}^+\Lambda(\alpha,\beta)=(\beta+\frac{\partial}{\partial\alpha})\Lambda(\alpha,\beta)$$

$$\Lambda(\alpha,\beta)\hat{a}^+=\Lambda(\alpha,\beta)\beta$$

$$\Lambda(\alpha,\beta)\hat{a}=(\frac{\partial}{\partial\beta}+\alpha)\Lambda(\alpha,\beta)$$

利用这些等式，可以给出 ρ 与复 P 表示有以下对应关系

$$\hat{a}\hat{\rho}\rightarrow\alpha P(\alpha,\beta)\qquad \hat{a}^+\hat{\rho}\rightarrow(\beta-\frac{\partial}{\partial\alpha})P(\alpha,\beta)$$

$$\hat{\rho}\hat{a}^+\rightarrow\beta P(\alpha,\beta)\qquad \hat{\rho}\hat{a}\rightarrow(\alpha-\frac{\partial}{\partial\beta})P(\alpha,\beta)$$

类似推导 Glauber-Sudarshan P 表示 C 方程，可以给出复 P 表示的福克－普朗克方程，将 α,β 表示为 α_1,α_2 有

$$\frac{\partial P(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial t}=[-\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}A_\mu(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}D_{\mu,\nu}(\alpha_1,\alpha_2)P(\alpha_1,\alpha_2)\tag{4.38}$$

μ,ν 分别取值为 1,2，两数重复表示求和，其中 $A_\mu(\alpha_1,\alpha_2)$ 和 $D_{\mu,\nu}(\alpha_1,\alpha_2)$ 是 α_1,α_2 的解析函数。

从随机过程理论可以证明，福克－普朗克方程完全等价自变量的随机微分方程，这方程就是爱因斯坦处理布朗运动的朗之万(Langevin)方程，这方程有更清楚物理图景显示热库对系统的作用。下面就利用朗之万方程来处理系统与热库的作用。

§4-3　朗之万方程

为了使读者更好理解量子朗之万方程的意义，回顾一下布朗

运动的经典朗之万方程。

1. 布朗运动的朗之万方程

一个悬浮在液体中的布朗粒子，除受外力作用外，将受到液体作用。液体作用除阻尼力作用外，还将受液体分子涨落力作用，使粒子作杂乱无章的布朗运动，相应运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-m\gamma v+f_{ex}+mF \tag{4.39}$$

这里取阻尼力正比于速度 v，f_{ex} 表示外力，可以暂时不考虑，F 为涨落力，它的系综平均为零

$$\langle F(t)\rangle \doteq 0$$

它的平方平均值不为零。由于每个摆动的平方都取正数，系综求平均不为零，$F(t)$ 发生显著改变的最短时间称为相关时间 τ，考虑乘积 $F(t)F(t')$，当 $|t-t'|>\tau$ 时，此乘积的平均值为零。而 $\langle F(t)F(t')\rangle$ 在 $t-t'$ 处有峰值，时间差 $|t'-t|\geqslant\tau$ 时为零，当 $\tau<1/\gamma$ 时有

$$\langle F(t)F(t')\rangle = D_v\delta(t-t')$$

其中 D_v 为常数，它是涨落大小的量度，上式称为马尔可夫近似，满足此关系的系统称为是马尔可夫性的。

为了使参量 γ 与 D_v 和上节所述内容联系起来，现讨论速度 v 的几率密度 $P(v,t)$ 满足的福克－普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial t}P(v,t)=-\frac{\partial}{\partial v}[M_1P(v,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}[M_2P(v,t)] \tag{4.40}$$

其中 M_n 为速度增量的 n 阶矩，定义

$$M_n=\frac{\langle(\Delta v)^n\rangle}{\Delta t}$$

要求 Δt 满足 $\tau<\Delta t<1/\gamma$，M_1 相应漂移系数，M_2 对应扩散系数。在不考虑外力时，方程(4.39)式有以下形式解

$$\Delta v(t) = -\gamma\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'\,v(t') + \int_t^{t+\Delta t}F(t')\mathrm{d}t'$$

利用$\langle F(t)\rangle = 0$有

$$M_1 = \frac{\langle\Delta v\rangle}{\Delta t} = -\gamma\langle v\rangle \tag{4.41}$$

二阶矩

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{\langle(\Delta v)^2\rangle}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{\Delta t}\{(\gamma\langle v^2\rangle)(\Delta t)^2 - 2\gamma\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t''\langle v(t')F(t'')\rangle \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t' + \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t''\langle F(t')F(t'')\rangle\}
\end{aligned}$$

大括号内第一项比例于$(\Delta t)^2$，当$\Delta t\to 0$时此项可略去，而第二项由于v与F关联小，平均为零，则有

$$M_2 = \frac{\langle(\Delta v)^2\rangle}{\Delta t} = D_v = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t''\langle F(t')F(t'')\rangle \tag{4.42}$$

在福克-普朗克方程中，M_2引起扩散，因此D_v为扩散系数。

2. 阻尼谐振子的朗之万方程

考虑由一个谐振子形成的系统。热库也是由许多谐振子组成，相应组合系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{H}} &= \hat{\mathscr{H}}_S + \hat{\mathscr{H}}_R + \hat{V} \\
&= \hbar\omega_0\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sum_j\hbar\omega_j\left(\hat{b}_j^+\hat{b}_j + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \hbar\sum_j g_j(\hat{a}^+\hat{b}_j + \hat{a}\hat{b}_j^+)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

由于系统算符与库算符对易，则算符的海森堡方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}},\hat{a}] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}_S + \hat{V},\hat{a}] \\
&= -\mathrm{i}\omega\hat{a} - \mathrm{i}\sum_j g_j\hat{b}_j
\end{aligned} \tag{4.44}$$

类似给出

$$\frac{d\hat{b}_i}{dt} = -i\omega_j\hat{b}_j - ig_j\hat{a} \tag{4.45}$$

方程(4.45)式形式的解为

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t_0)\exp[-i\omega_j(t-t_0)] - ig_j\int_{t_0}^{t} dt'\hat{a}(t')\exp[-i\omega_j(t-t')] \tag{4.46}$$

代入方程(4.44)式中并消去库算符，得到

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0\hat{a}(t) - \sum_j g_j^2\int_0^{t-t_0} d\tau\hat{a}(t-\tau)\exp(-i\omega_j\tau) - i\sum_j g_j\hat{b}_j(t_0)\exp[-i\omega_j(t-t_0)] \tag{4.47}$$

由于热库可以包括各种频率，对 j 求和可以用积分代替，即

$$\sum_j \to \int d\omega\rho(\omega)$$

对时间积分时，忽略主值部分中一个 δ 函数，给出

$$\int_0^{t-t_0} d\tau\sum_j g_j^2\exp(-i\omega_k\tau)\hat{a}(t-\tau)$$

$$\approx \hat{a}(t)\int_0^{\infty} d\tau\sum_j g_j^2\exp[i(\omega_0-\omega_j)\tau]$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\hat{a}(t)$$

其中阻尼系数

$$\gamma = \pi[g(\omega_0)]^2\rho(\omega_0) \tag{4.48}$$

(4.47) 式中右边最后一项

$$\hat{f}(t) = -i\sum_j g_j\hat{b}_j(t_0)\exp[-i\omega_j(t-t_0))$$

称为噪声算符，因随机的 $\hat{b}_j(t_0)$ 将涨落引入 $\hat{a}(t)$ 的运动方程，库平均 $\langle\hat{f}(t)\rangle_R = 0$，这样方程(4.47)式可以写为

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -(i\omega_0 + \frac{1}{2}\gamma)\hat{a}(t) + \hat{f}(t) \tag{4.49}$$

这里比朗之万方程多了 ω_0 项，为此引入缓变的湮灭算符和噪声算符

$$\hat{A}(t) = \exp[i\omega_0(t - t_0)]\hat{a}(t)$$

$$\hat{F}(t) = \exp[i\omega_0(t - t_0)]\hat{f}(t)$$

$$= -i\sum_j g_j\hat{b}_j(t_0)\exp[-i(\omega_k - \omega_0)(t - t_0)]$$

这样方程(4.49)式可以变成

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\gamma\hat{A}(t) + \hat{F}(t) \tag{4.50}$$

由于 $\hat{b}_j(t_0)$ 是随机的，它的库平均为零，因此噪声算符的库平均也为零，即

$$\langle\hat{F}_j(t)\rangle_R = 0$$

这样方程(4.50)式库平均为

$$\langle\frac{d\hat{A}}{dt}\rangle_R = -\frac{1}{2}\gamma\langle\hat{A}\rangle_R \tag{4.51}$$

下面计算粒子数算符 $\hat{A}^+\hat{A}$ 的平均运动。假定热库处于平衡态，相应粒子数算符。对波色子

$$\langle\hat{b}_j^+\hat{b}_j\rangle_R = \bar{n}(\omega_j) = [\exp(\hbar\omega_k/kT) - 1]^{-1}$$

不同波色子的湮灭与产生算符互不关联，有

$$\langle\hat{b}_i^+\hat{b}_j\rangle_R = \bar{n}(\omega_i)\delta_{ij}$$

因此关联函数

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}^+(t)\hat{F}(t')\rangle_R &= \sum_i\sum_j g_i g_j\langle\hat{b}_i^+\hat{b}_j\rangle \\ &\quad\cdot\exp[i(\omega_i - \omega_0)(t - t_0) - i(\omega_j - \omega_0)(t' - t_0)] \\ &= \sum_j g_j^2 n(\omega_j)\exp[i(\omega_j - \omega_0)(t - t')] \\ &= \pi[g(\omega_0)]^2\rho(\omega_0)\delta(t - t')\bar{n}(\omega_0) \\ &= \gamma\bar{n}(\omega_0)\delta(t - t')\end{aligned} \tag{4.52}$$

与经典量 D_v 类比，定义 $\hat{A}^+\hat{A}$ 的扩散系数 D_A

$$\langle\hat{F}^+(t)\hat{F}(t')\rangle_R = \langle D_A\rangle_R\delta(t - t')$$

从上面两式得到

$$\langle D_A \rangle_R = \gamma \bar{n}(\omega_0) \tag{4.53}$$

由于 $\hat{b}_j \hat{b}_j^+ = \hat{b}_j^+ \hat{b}_j + 1$，可以推出

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}(t) \hat{F}^+(t') \rangle &= \langle D_A' \rangle \delta(t - t') \\ &= \gamma(\bar{n}(\omega_0 + 1)\delta(t - t')\end{aligned}$$

根据这结果，利用朗之万方程可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle_R = -\gamma \langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle_R + \gamma \bar{n}(\omega_0) \tag{4.54}$$

从(4.53)式与(4.54)式给出

$$\langle D_A \rangle_R = \gamma \langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle_R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{A}^+ \hat{A} \rangle_R \tag{4.55}$$

将扩散系数用粒子数算符平均值及其变化的表示称为阻尼振子的"爱因斯坦关系"。

以上谐振子的热库是谐振子，下面给出热库是二能级原子的情况，其哈密顿量用赝自旋算符 $\hat{\sigma}_j$ 来表示，有

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}} &= \hat{\mathscr{H}}_S + \hat{\mathscr{H}}_{RT} + \hat{V} \\ &= \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}\hbar \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{zj} + \sum_j \hbar g_j (\hat{\sigma}_j^- \hat{a}^+ - \hat{\sigma}_j^+ \hat{a})\end{aligned} \tag{4.56}$$

$\hat{a}$ 与 $\hat{\sigma}$ 的海森堡方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\omega_0 \hat{a} - \mathrm{i}\sum_j g_j \hat{\sigma}_j \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\omega_j \hat{\sigma}_j^- + \mathrm{i}\hat{a} g_j [\hat{\sigma}_j^+, \hat{\sigma}_j^-]\end{aligned} \tag{4.57}$$

利用 $\hat{\sigma}$ 对易关系

$$[\hat{\sigma}_j^+, \hat{\sigma}_j^-] = 2\hat{\sigma}_{zj}$$

得到

$$\hat{\sigma}_j^-(t) = \hat{\sigma}_j(t_0)\exp(-\mathrm{i}\omega_j(t - t_0)]$$

$$+ \mathrm{i}2g_j\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\hat{a}(t')\hat{\sigma}_{zj}(t')\exp(-\mathrm{i}\omega_j(t-t'))]$$

(4.58)

注意所表示的积分中包含与时间有关的算符 $\hat{\sigma}_{zj}(t')$，这是与谐振子库不同的地方，将(4.58)式代入(4.57)式得到

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega_0\hat{a} - \mathrm{i}\sum_j g_j\hat{\sigma}_j(t_0)\exp[-\mathrm{i}\omega_j(t-t_0)]$$

$$-\sum_j 2g_j^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}(t')\hat{a}(t)\hat{\sigma}_{zj}(t')\exp[-\mathrm{i}\omega_j(t-t')]$$

(4.59)

3. 一般系统的朗之万方程

上面讨论了阻尼谐振子的朗之万方程，下面讨论普遍的情况。假定研究的系统 S 由以下一组算符来描述

$$\{\hat{a}\} \equiv \{\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_\mu,\cdots\}$$

例如对谐振子有

$$\{\hat{a}\} = \{\hat{a},\hat{a}^+\}$$

对二能级原子有

$$\{\hat{a}\} = \{\hat{\sigma}_1^-,\hat{\sigma}^+,\hat{\sigma}_z\}$$

对于所研究的对象，有以下对易关系

$$[\hat{\mathscr{H}}_S,\hat{a}_\mu] = -\hbar\omega_\mu\hat{a}_\mu$$

这些算符的海森堡方程为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}_\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}},\hat{a}_\mu] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}_S+\hat{V},\hat{a}_\mu]$$

$$= -\mathrm{i}\omega_\mu\hat{a}_\mu + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{V},\hat{a}_\mu] \tag{4.60}$$

一般相互作用算符都表示为一组双线性算符乘积之和，每个非线性乘积算符是一个系统算符和一个库算符的乘积，由于库算符的库平均为零，因此 $\hat{V}$ 的库平均也为零

$$\langle\hat{V}(t)\rangle_R = 0$$

因此，$\hat{V}(t)$ 的行为与噪声算符相似。引入缓变算符 $\hat{A}_\mu(t)$，定义

$$\hat{A}_\mu(t) = \hat{a}_\mu(t)\exp(\mathrm{i}\omega_\mu t)$$

它遵守的海森堡方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}_\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{V},\hat{A}_\mu] \tag{4.61}$$

如果希望得到一个 A_μ 的运动方程，其中不出现 $\hat{V}$ 中的库算符，这方程就是量子朗之万方程，表示为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}_\mu}{\mathrm{d}t} = \hat{d}_\mu(t) + \hat{F}_\mu(t) \tag{4.62}$$

其中 $\hat{d}_\mu(t)$ 是 $\hat{A}_\mu$ 的漂移算符，$\hat{F}_\mu$ 相应于噪声算符，其库平均为零

$$\langle\hat{F}_\mu(t)\rangle_R = 0$$

一般情况下很难严格给出朗之万方程(4.61)式，而必须采取一些近似。(4.62)式表示库平均

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{A}_\mu(t)\rangle_R = \langle\hat{d}_\mu(t)\rangle_R \tag{4.63}$$

考虑差

$$\Delta\hat{A}_\mu(t) = \hat{A}_\mu(t+\Delta t) - \hat{A}_\mu(t)$$

其中 $\Delta t < 1/\gamma$，将微扰展开法用于朗之万方程(4.61)式，得到

$$\Delta\hat{A}_\mu(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'[\hat{V}(t'),\hat{A}_\mu(t)] + \frac{-1}{\hbar^2}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'\int_t^{t'}\mathrm{d}t''[\hat{V}(t'),[\hat{V}(t''),\hat{A}_\mu(t)] + \cdots \tag{4.64}$$

从(4.63)式取差分得到

$$\langle D_\mu(t)\rangle_R = \frac{\langle\Delta A_\mu(t)\rangle_R}{\Delta t} \tag{4.65}$$

对(4.64)式取库平均，考虑到 $\langle\hat{V}\rangle_R = 0$，得

$$\langle\mathrm{d}_\mu(t)\rangle_R = -(\Delta t\hbar^2)^{-1}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t'\int_t^{t'}\mathrm{d}t''\langle[\hat{V}(t'),[\hat{V}(t''),\hat{A}_\mu(t)]]\rangle_R$$

$$= -(\Delta t\hbar^2)^{-1}\int_0^{\Delta t}\mathrm{d}\tau'\int_0^{\Delta t-\tau'}\mathrm{d}t''\langle[\hat{V}(t+\tau'+\tau''),$$

$$[\hat{V}(t+\tau'),\hat{A}_\mu(t)]]\rangle_R$$

只有当 τ'' 值较小时，$\hat{V}(t+\tau'+\tau'')$ 与 $\hat{V}(t+\tau')$ 关联才不为零，对 τ'' 积分扩展到无限大其值不变，而对 $d\tau'$ 积分限取 $\Delta t\to 0$，后面成常数积分，给出 Δt 与分母消去，得

$$\langle d_\mu(t)\rangle_R = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty dt\langle[\hat{V}(t+\tau),[\hat{V}(t),\hat{A}_\mu(t)]]\rangle_R$$

要给出 D_μ 的具体结果需要 $\hat{V}$ 表达式，若利用阻尼谐振子哈密顿量(4.43)式，可以推出

$$\langle\hat{d}_\mu\rangle_R = \frac{1}{2}\gamma\langle\hat{A}(t)\rangle_R \tag{4.66}$$

结果与前面相似，这里仅利用平均值。为了求扩散系数 $\langle\hat{D}_{\mu\nu}\rangle_R$，需求 ΔA_μ 二阶矩，由(4.62)式有

$$\begin{aligned}&\frac{\langle\Delta A_\mu(t)\Delta A_\nu(t)\rangle_R}{\Delta t}\\&=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t+\Delta t}dt''\langle\hat{d}_\mu(t')\hat{d}_\nu(t'')+\hat{d}_\mu(t')\hat{F}_\nu(t'')+\hat{F}_\mu(t')\hat{d}_\nu(t'')\\&\quad+\hat{F}_\mu(t')+\hat{F}_\nu(t'')\rangle_R\end{aligned}$$

由于 $\hat{d}_\mu(t')\hat{d}_\nu(t'')$ 在 Δt 内变化小，这项引出 Δt^2 的小量，第二与第三项也由 $\langle\hat{F}_\mu(t)\rangle_R=0$ 而可以忽略，而最后一积分正好是扩散系数 $\langle\hat{D}_{\mu\nu}\rangle_R$，得

$$\langle\hat{D}_{D\nu}\rangle_R = \frac{1}{\Delta t}\langle\Delta\hat{A}_\mu(t)\Delta\hat{A}_\nu(t)\rangle_R \tag{4.67}$$

上式可以看成是经典二阶矩的量子力学推广。利用此式和(4.64)式联合可以计算扩散系数 $\langle\hat{D}_{\mu\nu}\rangle_R$。

习　　题

4.1 对激光器证明其光子数分布满足主方程

$$\frac{d}{dt}P(m) = \frac{An}{1+n/n_s}P(n-1)-\frac{A(n+1)}{1+(n+1)/n_s}P(n)$$

$$- \gamma n P(n) \quad \gamma(n+1)P(n+1)$$

其中 A 为增益参数，n_s 为饱和光子数，γ 是腔的衰减率。

4.2 一个在谐振线性力驱动下的阻尼谐振子，可证明在相互作用绘景中其主方程为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\varepsilon[\hat{a} + \hat{a}^{+}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{+}\hat{a})$$

证明它的稳态解是相干态 $|2\mathrm{i}\varepsilon/\gamma\rangle$。

4.3 一个位相扩散的谐振子满足主方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = -\gamma[\hat{a}^{+}\hat{a}, [\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{\rho}]]$$

证明它的 Q 表示满足以下的福克 - 普朗克方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha Q \frac{\partial}{\partial\alpha^{*}}\alpha^{*}Q + 2\frac{\partial^{2}}{\partial\alpha\partial\alpha^{*}}|\alpha|^{2}Q - \frac{\partial^{2}}{\partial\alpha^{2}}\alpha^{2}Q - \frac{\partial^{2}}{\partial\alpha^{*2}}\alpha^{*2}Q\right)$$

4.4 写出原子算符 σ^{-} 和 σ^{+} 的海森堡方程。当二能级原子与谐振子库耦合时，写出它的朗之万方程。

参 考 文 献

〔1〕 M. 萨晋 Ⅲ,M. O. 斯考莱,W. E. 兰姆. 激光物理学. 科学出版社,1982.

〔2〕 郭光灿. 量子光学. 高等教育出版社,1990.

〔3〕 D. F. walls,G. J. Milburn. Quantum optics spring-verlag. Berlin,1994.

〔4〕 G. W. Gardinev. Quantum noise. Springer Verlag,Berlin,1991.

第五章　光学压缩态

在第三章介绍了相干态，它具有最小噪声。相干态是平移真空态，其最小噪声为真空涨落，若利用相干态光场进行精密测量，其精度受到真空涨落的限制。如果探测引力波，据估算引力波引起宏观物体的位移，比真空涨落引起振子位移还小，因此无法探测出来，可见量子噪声限制着相干态光场在微弱信号检测方面应用，也影响通信中信噪比提高，那么能否找到一个新光场，其噪声特性比相干态更好呢？答案是肯定的，这就是压缩态光场。

本章将介绍光学压缩态(squeezed state)的定义、性质、检测、产生及可能的应用。

§5-1　光学压缩态的定义与性质

相干态具有最小的测不准量，本节从相干态出发引入光学压缩态。

1. 光学压缩态的定义

将光场看成一个谐振子场，相应的广义坐标和动量为

$$\hat{q}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^{+}) \qquad \hat{P}=i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^{+})$$

均方差定义为

$$\Delta A=\sqrt{V(A)}=\sqrt{\langle\hat{A}^{2}\rangle-\langle\hat{A}\rangle^{2}} \tag{5.1}$$

$$(\Delta q)_{coh}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \qquad (\Delta P)_{coh}=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}$$

对相干态坐标与动量的测不准关系为

$$(\Delta q\Delta P)_{\mathrm{coh}}=\frac{\hbar}{2} \tag{5.2}$$

湮灭算符与产生算符可以写为两个厄米算符的线性组合

$$\hat{a}=\hat{X}_1+\mathrm{i}\hat{X}_2 \qquad \hat{a}^+=\hat{X}_1-\mathrm{i}\hat{X}_2$$

$\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 对应复振幅的实部和虚部，给出两个正交相的振幅。反之

$$\hat{X}_1=\frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^+)=(\frac{\omega}{2\hbar})^{\frac{1}{2}}\hat{q}$$

$$\hat{X}_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{a}-\hat{a}^+)=(\frac{1}{2\hbar\omega})^{\frac{1}{2}}\hat{P}$$

容易证明，对相干态，两个正交相分量的方差相等

$$\langle(\Delta\hat{X}_1^2)^2\rangle=\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle=\frac{1}{4}$$

$$(\Delta X_1\Delta X_2)_{\mathrm{coh}}=\frac{1}{4} \tag{5.3}$$

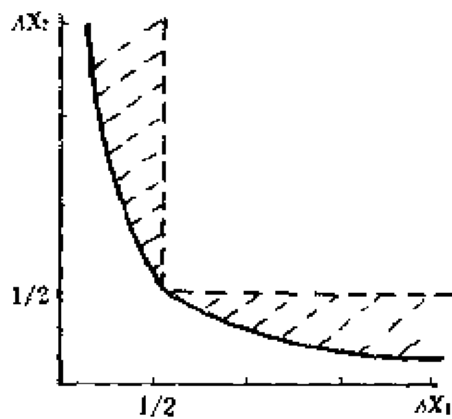


图 5.1

图 5.1 中画出 $\Delta X_1\Delta X_2=\frac{1}{4}$ 是双曲线，而相干态对应曲线上一点 $\Delta X_1=\Delta X_2=\frac{1}{2}$。曲线上其他点相应压缩相干态。图中斜线部分分别相应 $\Delta X_1<\frac{1}{2}$ 或 $\Delta X_2<\frac{1}{2}$，也是压缩态，这时 $\Delta X_1\Delta X_2>\frac{1}{4}$ 为广义压缩态。

压缩态可以利用压缩算符作用在相干态上得到，引入压缩算符

$$\hat{S}(\varepsilon)=\exp(\frac{1}{2}\varepsilon^*\hat{a}^2-\frac{1}{2}\varepsilon\hat{a}^{+2}) \tag{5.4}$$

式中 $\varepsilon=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$s$ 为压缩参数，θ 为压缩角。压缩算符满足关系

$$\hat{S}^+(\varepsilon)=\hat{S}^{-1}(\varepsilon)=\hat{S}(-\varepsilon)$$

它有以下变换性质

$$\hat{S}^{+}(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}(\varepsilon)=\hat{a}\mathrm{ch}S-\hat{a}^{+}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}S$$

$$\hat{S}^{+}(\varepsilon)\hat{a}^{+}\hat{S}(\varepsilon)=\hat{a}^{+}\mathrm{ch}S-\hat{a}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}S$$

若 $\hat{D}(\alpha)$ 为位移算符，压缩态 $|\alpha\varepsilon\rangle$ 表示为

$$\begin{aligned}|\alpha\varepsilon\rangle &=\hat{S}(\varepsilon)|\alpha\rangle \\ &=\hat{S}(\varepsilon)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \\ &=\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\varepsilon)|0\rangle\end{aligned} \tag{5.5}$$

以上讨论是单模压缩态。若压缩态中有两个或多个频率存在，则为多模压缩态。

双模压缩态对应两频率 ω_{+} 与 ω_{-}，定义

$$|\alpha_{+}\alpha_{-}\varepsilon\rangle=D_{1}(\alpha)D_{-}(\alpha)S(\varepsilon)|0\rangle \tag{5.6}$$

其中

$$D_{\pm}(\alpha)=\exp|\alpha\hat{a}_{\pm}^{+}-\alpha^{*}\hat{a}_{\pm})$$

$$S(\varepsilon)=\exp(\varepsilon^{*}\hat{a}_{+}\hat{a}_{-}-\varepsilon\hat{a}_{+}^{+}\hat{a}_{-}^{+})$$

它们具有以下性质：

$$\hat{S}^{+}\hat{a}_{\pm}\hat{S}=\hat{a}_{\pm}\mathrm{ch}\hat{s}-\hat{a}_{\mp}^{+}\mathrm{sh}\hat{s}$$

相应期望值为

$$\langle\hat{a}_{+}\rangle=\alpha_{+}\qquad\langle\hat{a}_{-}\rangle=\alpha_{-}$$

在双模情况下，正交算符

$$\hat{X}_{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{+}+\hat{a}_{-}^{+}+\hat{a}_{-}+\hat{a}_{+}^{+})$$

这时 X_1 的平均值和方差分别为

$$\begin{aligned}&\langle X_{1}\rangle=2[\mathrm{Re}(\alpha_{+})+\mathrm{Re}(\alpha_{-})] \\ &V(X_{1})=(\mathrm{e}^{-2\varepsilon}\cos^{2}\frac{\theta}{2}+\mathrm{e}^{2\varepsilon}\sin^{2}\frac{\theta}{2})\end{aligned} \tag{5.7}$$

这关系将在§5-3中应用。

2. 双光子相干态

压缩相干态也可以用另一种方法来定义，就是双光子相干态。

考虑单模场，使它一部分和它位相复共轭波混合，构成新场。新场的湮灭算符为

$$\hat{b}_s = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^+ \tag{5.8}$$

其中

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1。$$

从$[\hat{a},\hat{a}^+]=1$，可以证明$[\hat{b}_s,\hat{b}_s^+]=1$

可以证明，若$\hat{a}$的本征态是相干态，则$\hat{b}_s$的本征态是压缩相干态。从物理上说，是让一束相干光与它的位相复共轭光混合就产生压缩光。压缩光是两束光相干结果，称双光子相干态。取$|\alpha\rangle$为相干态，$|\beta\rangle_g$为双光子相干态，则

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\hat{b}|\beta\rangle_g = \beta|\beta\rangle_g$$

引入么正算符U，有

$$|\beta\rangle_g = U|\alpha\rangle$$

$$\hat{b} = U\hat{a}U^+$$

若取$|0\rangle_g = U|0\rangle$，则有

$$|\beta\rangle_g = D_g(\beta)|0\rangle_g$$

其中$D_g(\beta)$为位移算符

$$D_g(\beta) = e^{\beta\hat{b}^+ - \beta^+\hat{b}}$$

双光子相干态是超完备的

$$\int |\beta\rangle_{gg}\langle\beta| \frac{d^2\beta}{\pi} = 1 \tag{5.9}$$

它不同本征态的标积。

$${}_g\langle\beta|\beta'\rangle_g = \exp\left[\beta^*\beta' - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\beta'|^2\right] \tag{5.10}$$

表明它们不是相互正交的。

下面考虑双光子相干态与压缩态的关系。

取

$$U = \hat{S}(\varepsilon) \qquad \mu = \mathrm{ch}\hat{s} \qquad \nu = e^{i\theta}\mathrm{sh}s$$

$$|0\rangle_g \equiv |0,\varepsilon\rangle$$

则双光子相干态

$$\begin{aligned}|\beta\rangle_g &= \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\varepsilon)|0\rangle = |\alpha_1\varepsilon\rangle \\ &= \hat{S}(\varepsilon)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \end{aligned} \tag{5.11}$$

由于 $d^2\beta = d^2\alpha$，则从双光子相干态的完备性可以给出压缩态的完备性

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha,\varepsilon\rangle\langle\alpha,\varepsilon| = I$$

其中 $\alpha = \mu\beta - v\beta^* = \beta\operatorname{ch}s - \beta^* e^{i\theta}\operatorname{sh}s$

压缩态可以用 X_1 与 X_2 形成的相图来表示，见图5.2。

真空态的不确定量可以用原点附近半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆表示，它对应的 ΔX_1，ΔX_2 分别为 $\frac{1}{2}$，$\hat{D}(\alpha)$ 作用使它移动 α 距离。

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im}\alpha/\operatorname{Re}\alpha \tag{5.12}$$

$\hat{S}(\varepsilon)$ 作用使圆压成椭圆，长轴与 X_2 夹角为 $\theta/2$。

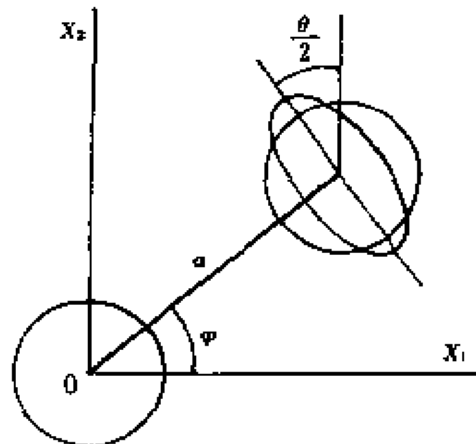


图 5.2

$$|\alpha\varepsilon\rangle = \hat{S}(\varepsilon)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$$

$|0\varepsilon\rangle = \hat{S}(\varepsilon)|0\rangle$ 为压缩真空态。

3. 光学压缩态的一般性质

下面讨论压缩态光场的某些性质。先讨论两个正交分量的测不准量，然后讨论光子数与位相问题。

利用压缩态的表示式

$$|\alpha\varepsilon\rangle - \hat{S}(\varepsilon)\hat{D}(\alpha)|0\rangle - \hat{S}(\varepsilon)|\alpha\rangle$$

可以计算某些算符的期望值

$$\langle\hat{a}\rangle_s = \langle\alpha\varepsilon|\hat{a}|\alpha\varepsilon\rangle$$
$$= \langle\alpha|\hat{S}^{+}\hat{a}\hat{S}|\alpha\rangle$$
$$= \langle\alpha|\hat{a}\mathrm{ch}s - \hat{a}^{+}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}s|\alpha\rangle$$
$$= \alpha\mathrm{ch}s - \alpha^{*}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}s \tag{5.13}$$
$$\langle\hat{a}^{+}\rangle_s = \langle\alpha|\hat{S}^{+}\hat{a}^{+}\hat{S}|\alpha\rangle = \alpha^{*}\mathrm{ch}s - \alpha\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{sh}s$$

光子数算符的期望值为

$$\langle\hat{n}\rangle_s = \langle\hat{a}^{+}\hat{a}\rangle_s = |\alpha|^2 + \mathrm{sh}^2 s \tag{5.14}$$

第一项与相干态光场振幅 α 有关，第二项是真空压缩作用，看出光子数随压缩系数 S 的增加而增加，对压缩真空态，$|\alpha|^2=0$。

$$\langle\hat{n}\rangle_{s0} = \mathrm{sh}^2 s$$

还可以计算两个正交分量的期望值

$$\langle\hat{X}_1\rangle_s = \mathrm{R\,e}[\mathrm{ch}s - \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}s]$$
$$\langle\hat{X}_2\rangle_s = \frac{1}{2i}\langle\hat{a} - \hat{a}^{+}\rangle_s$$
$$= \frac{1}{2i}[(\alpha - \alpha^{*})\mathrm{ch}s + (\alpha - \alpha^{*})\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}s]$$
$$= \mathrm{Im}\alpha[\mathrm{ch}S + \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{sh}S]$$

两正交分量方差

$$\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle_s = \langle\hat{X}_1^2\rangle_s - \langle\hat{X}_1\rangle^2{}_s$$
$$= \frac{1}{4}[\exp(-2s)\cos^2\frac{1}{2}\theta + \exp(2s)\sin^2\frac{1}{2}\theta] \tag{5.15}$$
$$\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle = \frac{1}{4}[\exp(-2s)\sin^2\frac{1}{2}\theta + \exp(2s)\cos^2\frac{1}{2}\theta]$$

在 X_1，X_2相图中，测不准量形成一个椭圆，椭圆主轴与 X_1与 X_2轴夹角为 $\theta/2$．长轴为$\frac{1}{2}\exp s$，短轴为$\frac{1}{2}\exp(-s)$，如图5.3所示。当 $\theta=0$时

$$\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle_s = \frac{1}{4}\exp(-2s)$$

$$\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_s = \frac{1}{4}\exp(2s)$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4} \qquad \theta = \theta, \pi$$

其他 θ 角

$$\Delta X_1 \Delta X_2 > \frac{1}{4} \qquad (5.16)$$

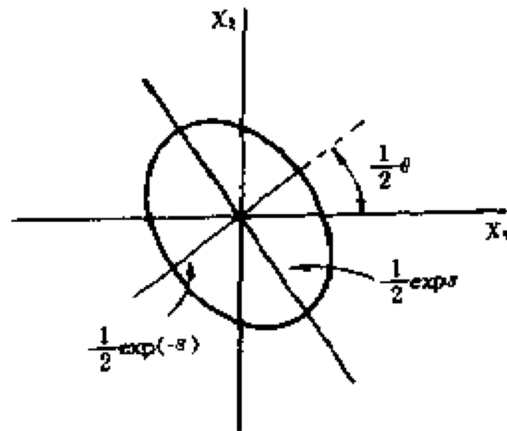


图 5.3

光场的非经典特性或量子性，除压缩态外，还有反聚束效应和亚泊松分布。

是否具有反聚束效应，可利用标准化二阶相关函数来表示

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a}\hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}^2\rangle} \qquad (5.17)$$

对聚束场 $g^{(2)}(0) > 1$，反聚束场 $g^{(2)}(0) < 1$。

对于亚泊松分布，引入亚泊松因子

$$Q = \frac{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle} = \langle\hat{n}\rangle[g^{(2)}(0) - 1] \qquad (5.18)$$

$Q > 0$ 为超泊松分布，$Q = 0$ 为泊松分布，$Q < 0$ 为亚泊松分布。

对压缩真空态 $\alpha = 0$，有

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 2\langle\hat{n}\rangle(\langle\hat{n}\rangle + 1)$$

$$g^{(2)}(0) = 3 + 1/\langle\hat{n}\rangle > 1 \qquad (5.19)$$

$$Q = 2\langle\hat{n}\rangle + 1 > 0$$

表明压缩真空态是聚束的且有超泊松分布。

实验中对压缩光进行检测时，常利用较强的本地相干光与压缩光混合，因此必须考虑强相干光对平均光子数的贡献。这时 $|\alpha|^2 \gg \exp(2s)$

$$\langle\hat{n}\rangle \approx |\alpha|^2$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = |\alpha|^2[\exp(-2s)\cos^2(\varphi - \frac{1}{2}\theta) + \exp(2s)\sin^2(\varphi - \frac{1}{2}\theta)]$$

其中

$$\alpha = |\alpha|\exp(i\varphi)$$

这时混合光场位相测不准量为

$$\langle(\Delta\hat{\varphi})^2\rangle = [\exp(-2s)\sin^2(\varphi - \frac{\theta}{2}) + \exp(2s)\cos^2(\varphi - \frac{\theta}{2})]$$

当 $\varphi = \frac{\theta}{2}$ 时，有

$$\Delta n \Delta\varphi = \frac{1}{2} \tag{5.20}$$

注意与正交分量 $\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$ 不同。下面给出压缩态 $|\alpha\varepsilon\rangle$ 光子数分布。早在1976年当 Yuen 引入压缩态时就给出

$$\langle n|\alpha\varepsilon\rangle = (n!\operatorname{ch}s)^{-1/2}[\frac{1}{2}\exp(i\theta)\tanh s]^{n/2}$$

$$\times\exp[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha^*\exp(i\theta)\tanh s]H_n\left(\frac{\alpha + \alpha^*\exp(i\theta)\tanh s}{(2\exp(i\theta)\tanh s)^{1/2}}\right) \tag{5.21}$$

其中 H_n 为厄米多项式。当与强相干光叠加时，$|\alpha|^2 \gg \exp(2s)$，上式可以简化，得光子数分布为

$$P_n = \frac{1}{[2\pi\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle]^{\frac{1}{2}}}\exp[-(n - |\alpha|^2)^2/2\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle] \tag{5.22}$$

光子数具有高斯型分布。当 $\varphi = \theta/2$ 时，$Q > 0$ 为超泊松分布，当 $\varphi = (\theta + \pi)/2$ 时，$Q < 0$ 为亚泊松分布。

4. 压缩光的表示

将压缩态密度算符用相干态展开，可以给出它的各种表示，压缩态的 P 表示是奇异的，没有意义，下面给出它的 wigner 表示、Q 表示和复 P 表示

压缩态的 wigner 表示为

$$W(x') = \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{2}(x_1'^2 e^{-2s} + x_2'^2 e^{2s})] \tag{5.23}$$

其中$x'_i = x_i - X_i$，wigner 函数的等价线对应一个椭圆，即

$$\frac{x_1'^2}{e^{2S}} + \frac{x_2'^2}{e^{-2S}} = 1$$

相应椭圆长轴为 e^S，短轴为 e^{-S}。

压缩态$|\alpha\varepsilon\rangle$的 Q 表示为

$$Q(\beta,\beta^*) = \frac{1}{\pi}|\langle\beta|D(\alpha)\delta(\varepsilon)|0\rangle|^2$$

它是多变量高斯分布，用正交相变数 x_1，x_2表示为

$$Q(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2\mathrm{ch}S}\exp[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T C^{-1}(\vec{x}-\vec{x}_0)] \quad (5.24)$$

其中，

$$x_0 = 2\{\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}(\alpha)\} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2)$$

$$C = \begin{bmatrix} e^{-2r}+1 & 0 \\ 0 & e^{2r}+1 \end{bmatrix}$$

对压缩态$|\gamma\varepsilon\rangle$的复 P 表示为

$$P(\alpha,\beta) = N\exp\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma^*)+\mathrm{ch}S[(\alpha-\gamma)^2+(\rho-\gamma^*)^2]\} \quad (5.25)$$

N 为归一化常数

$$N = \frac{1}{2\pi\mathrm{sh}S}$$

§5-2 光学压缩态的检测

前节指出压缩态的测不准量是与位相有关的。在某一位相相应正交分量，它的测不准量可以小于相干态。如果希望通信系统有较高信噪比，就应将信号光能量加在涨落小的正交分量上，使其噪声可以小于相干态。因此对信号测量必须利用相干测量。如果利用

普通光电探测器直接测量，将显示不出压缩光的优越性，因这时将同时测量两个正交分量，一个分量的噪声减弱，另一个分量加强，合起来噪声加大。

因此，对于位相有关噪声必须利用同频率相干光混合于压缩光、进行相干探测，这就是所谓零差(homedyne)探测。下面介绍零差探测器原理和方法。

1. 寻常零差探测器

如图5.4所示，利用同频率相干光作本地激光，它与信号光通过束分离器(BS)耦合而达光电探测器 D，r 与 t 分别是束分离器的反射与穿透系数。下面分别从经典与量子理论来分析零差探测器原理，从中可以看出量子理论分析的必要性。

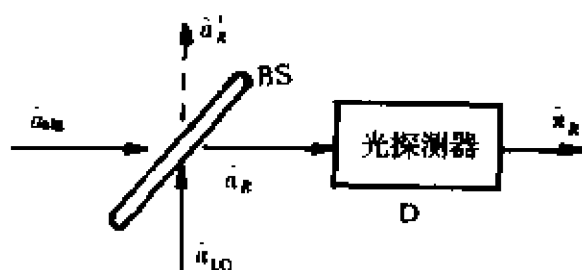


图 5.4

A. 经典理论

经典理论和量子理论的不同之处是如何处理和解释信号光的噪声。经典理论中，将信号光处理为正弦波，光电探测器在光电转换中出现散粒效应是噪声的主要来源。取 α_{sig} 和 α_{LO} 为信号与本机振荡光的复振幅，束分离器输出场的复振幅为

$$\alpha_R = t\alpha_{sig} + r\alpha_{LO}$$

照在光电探测器上的光束强度为

$$I_l = |\alpha_R|^2 = t^2|\alpha_{sig}|^2 + r^2|\alpha_{LO}|^2 + 2rt\mathrm{Re}[\alpha_{sig}\alpha_{LO}^*]$$

光电子产生的分布函数为泊松分布

$$P(n) = \frac{\langle n\rangle^n}{n!}\exp[-\langle n\rangle]$$

平均光电子数$\langle n\rangle=\eta|\alpha_R|^2$。式中$\eta$为探测效率，近似取$\eta=1$，则有

$$\langle n\rangle=t^2|\alpha_{sig}|^2+r^2|\alpha_{LO}|^2+2rt\mathrm{Re}[\alpha_{sig}\alpha_{LO}^*]$$

对于泊松分布，均方差为$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle n\rangle$，因此有

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=t^2|\alpha_{sig}|^2+r^2|\alpha_{LO}|^2+2rt\mathrm{Re}[\alpha_{sig}\alpha_{LO}^*] \tag{5.26}$$

一般情况下，本机振荡光强$|\alpha_{LO}|^2$远大于信号光强$|\alpha_{sig}|^2$，故

$$\langle(\Delta n)^2\rangle\approx r^2|\alpha_{LO}|^2$$

则探测光电子方差主要取决于本地激光强度，而与输入信号关系很小，因此无法测定信号光的压缩性。

B. 量子理论

量子理论的分析基于算符代数，光电探测器测光子数为

$$\hat{n}_R=\hat{a}_R^+\hat{a}_R$$

其中$\hat{a}_R$算符是信号算符$\hat{a}_{sig}$和本地场$\hat{a}_{LO}$的线性组合．从图5.4中可见

$$\hat{a}_R=t\hat{a}_{sig}+r\hat{a}_{LO}$$

这里忽略反射光可能出现的半波损失．接受场光子数算符为

$$\begin{aligned}\hat{n}_R&=(t\hat{a}_{sig}^++r\hat{a}_{LO}^+)(t\hat{a}_{sig}+r\hat{a}_{LO})\\&=t^2\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{sig}+r^2\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{LO}+rt(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})\end{aligned} \tag{5.27}$$

假定本地激光很强，通过经典处理，取相干场$|\alpha_{LO}\rangle\alpha_{LO}=|\alpha_{LO}|e^{i\varphi_{LO}}$，则探测光子数平均值为

$$\langle\hat{n}_R\rangle=t^2\langle\hat{n}_{sig}\rangle+2rt\langle\hat{X}(\theta)\rangle\alpha_{LO}+r^2\langle\hat{n}_{LO}\rangle$$

其中算符$\hat{X}(\theta)$与位相有关，即

$$\hat{X}(\theta)=\hat{a}_{sig}^+\exp(i\theta)+\hat{a}_{sig}\exp(-i\theta)$$

光子数的平方算符为

$$\begin{aligned}\hat{n}_R^2=&t^4\hat{n}_{sig}^2+r^4\hat{n}_{LO}^2+r^2t^2(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})^2\\&+r^2t^2(\hat{n}_{sig}\hat{n}_{LO}+\hat{n}_{LO}\hat{n}_{sig})+rt^3[\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{sig}(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})\\&+(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{sig}]\\&+r^3t[(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{LO}(\hat{a}_{sig}^+\hat{a}_{LO}+\hat{a}_{LO}^+\hat{a}_{sig})]\end{aligned}$$

它的期望值是

$$\langle n_R^2\rangle = t^4\langle n_{\rm sig}^2\rangle + r^4\langle \hat{n}_{\rm LO}^2\rangle + r^2t^2\langle \hat{n}_{\rm sig}\rangle + r^2t^2|\alpha_{\rm LO}|^2\langle \hat{X}^2(\varphi_{\rm LO})\rangle$$
$$+2rt^3|\alpha_{\rm LO}|\langle \hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}e^{i\varphi_{\rm LO}} + \hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm sig}e^{-i\varphi_{\rm LO}}\rangle$$
$$+2r^3t|\alpha_{\rm LO}|^3\langle \hat{X}(\varphi_{\rm LO})\rangle + 2r^2t^2\langle \hat{n}_{\rm sig}\rangle|\alpha_{\rm LO}|^2$$

则均方差为

$$\langle(\Delta)n_R)^2\rangle = \langle \hat{n}_R^2\rangle - \langle \hat{n}_R\rangle^2$$
$$\doteq t^4\langle \Delta n_{\rm sig}^2\rangle + r^4\langle \Delta n_{\rm LO}^2\rangle + 2r^3t|\alpha_{\rm LO}|^3\langle X(\varphi_{\rm LO})\rangle$$
$$+r^2t^2\langle n_{\rm sig}\rangle + 4r^2t^2\langle \Delta X^2(\varphi_{\rm LO})\rangle|\alpha_{\rm LO}|^2$$
$$+3rt^3|\alpha_{\rm LO}|\langle \hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}\exp(i\varphi_{\rm LO}) + \hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm sig}\exp(-i\varphi_{\rm LO})\rangle$$

一般情况$|\alpha_{\rm LO}|^2 \gg |\alpha_{\rm sig}|^2$,要测到信号,要求$r\ll t$,这时起主要作用的是$r^2t^2$项,近似有

$$\langle \Delta n_R^2\rangle \approx r^2t^2\langle \hat{n}_{\rm sig}\rangle + 4r^2t^2|\alpha_{\rm LO}|^2\langle \Delta X^2(\varphi_{\rm LO})\rangle \qquad (5.28)$$

而两项中后一项又起主要作用,其大小与本地激光与压缩光之间位相$\varphi_{\rm LO}$密切相关,因此可以测出压缩光位相的有关性质。但是该方法的缺点是要求$r\ll t$,则本地激光能量大部分被放弃,若要进一步提高性能,就要利用平衡零差探测器。

2. 平衡零差探测器

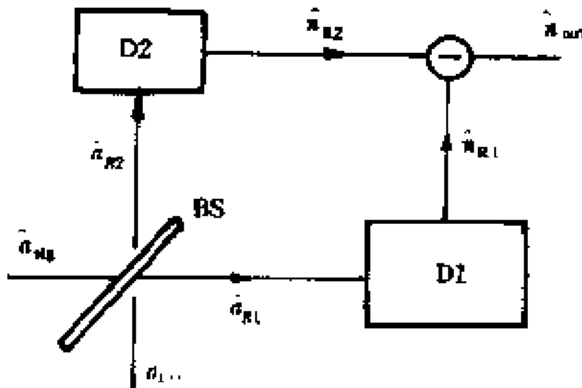


图 5.5

图5.5给出平衡零差探测器的示意图。在探测器中,信号与本地激光通过50:50束分离器混合,两混合光束分别由两个光探测器D_1和D_2探测,两光电流相减给出信号光信息。在此探测器中,本地振动激光能量被充分利用而它的噪声被抵消。下面介绍平衡零差探测器的工作原理。

平衡零差探测过程中,透射与反射光束在束分离器中,位相

差是特别重要的。为此用复数 r，t 表示反射和透射系数，r 与 t 的关系是

$$|r|=|t|=\frac{1}{2}$$

相角
$$\arg[r]-\arg[t]=\frac{\pi}{2}$$

这样两束分离器的输出与输入信号关系为

$$\hat{a}_{R_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_{\rm sig}+\frac{\rm i}{\sqrt{2}}\hat{a}_{\rm LO}$$

$$\hat{a}_{R_2}=\frac{\rm i}{\sqrt{2}}\hat{a}_{\rm sig}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_{\rm LO}$$

人们感兴趣的是相减以后的光电子数 $\hat{n}_{\rm out}$。

$$\begin{aligned}\hat{n}_{\rm out}&=\hat{n}_{R_1}-\hat{n}_{R_2}\\&=\frac{1}{2}(\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}+{\rm i}\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm LO}-{\rm i}\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm LO}^{+}+\hat{a}_{\rm LO}^{+}\hat{a}_{\rm LO})\\&\quad-\frac{1}{2}(\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}-{\rm i}\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm LO}+{\rm i}\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm LO}^{+}+\hat{a}_{\rm LO}^{+}\hat{a}_{\rm LO})\\&={\rm i}(\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm LO}-\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm LO}^{+})\end{aligned}\tag{5.29}$$

本地振荡信号强且处在相干态，因此可以取

$$\langle\hat{a}_{\rm LO}\rangle=|\alpha_{\rm LO}|\exp({\rm i}\varphi_{\rm LO})$$

则有

$$\langle\hat{n}_{\rm out}\rangle=2|\alpha_{\rm LO}|\langle\hat{X}(\theta)\rangle\tag{5.30}$$

要求重新定义场算符 $\hat{X}(\theta)$ 中的相角 θ，使它包括束分离器处相移的变化。

$$\theta=\varphi_{\rm LO}+\frac{\pi}{2}\tag{5.31}$$

类似地可以得到输出电子数算符平方平均值为

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}_{\rm out}^{2}\rangle&=\langle-\hat{a}_{\rm sig}^{+2}\hat{a}_{\rm LO}^{2}-\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm LO}\hat{a}_{\rm LO}^{+}-\hat{a}_{\rm sig}\hat{a}_{\rm sig}^{+}\hat{a}_{\rm LO}^{+}\hat{a}_{\rm LO}+\hat{a}_{\rm sig}^{2}\hat{a}_{\rm LO}^{+2}\rangle\\&=4\langle\hat{X}^{2}(\theta)\rangle|\alpha_{\rm LO}|^{2}+\langle\hat{n}_{\rm sig}\rangle\end{aligned}\tag{5.32}$$

则输出电子数均方差为

$$\langle \Delta\hat{n}_{out}{}^2\rangle = 4\langle \Delta\hat{X}(\theta)^2\rangle |\alpha_{LO}|^2 + \langle \hat{n}_{sig}\rangle \tag{5.33}$$

(5.33)式显示了平衡零差探测器中输出的变化，是由输入信号光正交分量的涨落所决定。在表达式中，信号光和本地光散粒噪声$\langle (\Delta\hat{n}_{sig})^2\rangle$和$\langle \Delta\hat{n}_{LO}^2\rangle$都不出现，其原因是由于两光电探测器信号相减而抵消，而最后测出信号是信号光的正交分量涨落通过本地光放大的信号。

3. 平衡零差探测器的使用

在实验中光子数用光电探测器来测定，为简单起见，假定光电探测器的量子效率为 1，光子数分布即为光电子数分布，平均光电流将与单位时间通过平均光子数成正比，有

$$\overline{i(t)} = e\langle n(t)\rangle$$

e 为电子电量，光电流涨落用光子数涨落表示为

$$\overline{\Delta i(t)^2} = e^2\langle \Delta\hat{n}(t)^2\rangle$$

当信号光是相干光时有

$$\overline{i(t)} = e\langle n(t)\rangle$$

$$\overline{\Delta i(t)^2} = e^2\langle \Delta\hat{n}(t)^2\rangle = e^2\langle n(t)\rangle \tag{5.34}$$

图5.6给出一个基于平衡零差探测原理的观测压缩光的实验装置示意图。利用非线性介质产生压缩光，激光器分两束，一束为本地振荡激光 $\hat{a}_{LO}$，另一束通过压缩器而产生压缩光，两束光利用分束器 BS1构成平衡零差探测器。利用移相器可以控制本地激光的位相，以达到与压缩光位相匹配的要求。

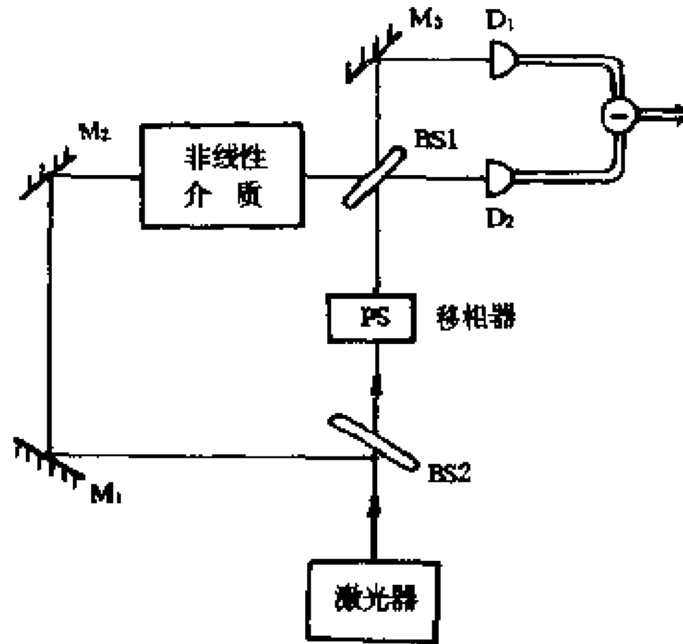


图 5.6

首先测定真空噪声，以决定真空涨落水平。在装置中，切断信号光输入，以使平衡零差探测器达到真空涨落，这时光电流涨落为

$$\overline{\Delta i(t)^2}=e^2|\alpha_{LO}|^2 \tag{5.35}$$

(5.35)式反映真空涨落水平，然后注入压缩光到束分离器 BS1的输入部分，本地激光与压缩光相干。压缩光取双光子相干态

$$\hat{b}_S=\mu\hat{a}^+ + \nu\hat{a} \qquad \mu^2-\nu^2=1$$

本地激光取经典表示

$$|\alpha\rangle_{LO}=|\alpha_{LO}|e^{i\varphi_{LO}}$$

则压缩光位相有关的正交分量涨落为

$$\langle\Delta\hat{X}(\theta)^2\rangle=\frac{1}{4}\{(\mu-\nu)^2\cos^2\theta+(\mu+\nu)^2\sin^2\theta\} \tag{5.36}$$

均方差与本地激光相角有关：$\theta=\frac{\pi}{2}+\varphi_{LO}$，若取 $\theta=0$，可测到 $\hat{X}$ 噪声的 cos 分量，电流涨落

$$\begin{aligned}\overline{\Delta i(t)^2}&=e^2\langle\Delta\hat{n}(t)^2\rangle=e^2 4\langle\Delta\hat{X}(\theta)^2\rangle|\alpha_{LO}|^2\\&=e^2(\mu-\nu)^2|\alpha_{LO}|^2\end{aligned}$$

$$<e^2|\alpha_{LO}|^2 \quad (5.37)$$

因为 $\mu^2-\nu^2=1$，则 $(\mu-\nu)^2<1$。显示光处在压缩态。利用移相器改变 φ_{LO}，则 θ 也变化，测到光电流的涨落将大于或小于真空涨落。利用此方法可以观测压缩态。若为非压缩态，合成光涨落在任何位相都不能低于真空涨落。

§5-3 利用参数振荡产生光学压缩态

自从1985年 Slusher 等人利用四波混频产生光学压缩态后，IBM 的 Shelby 等人利用光纤中的 Kerr 效应在光纤中产生压缩光。在美国 Taxas 大学学习的中国学者吴令安等人利用光学参数振荡产生压缩态。本节介绍利用光学参数振荡产生压缩态的原理和实验。下一节介绍利用四波混频产生压缩态。至于有关光纤中压缩态的产生将在下章讨论。

1. 参数振荡器的含意

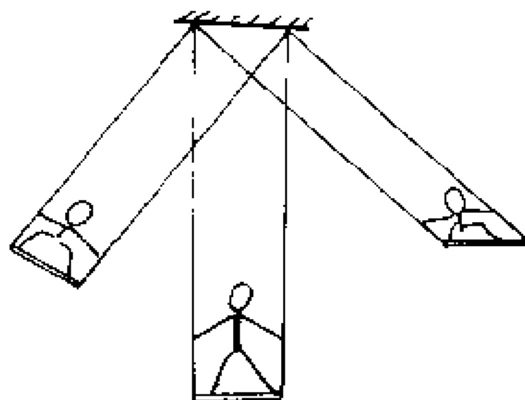


图 5.7

为了帮助读者理解光学参数振荡器的含意，首先介绍一个简易的机械参数振荡器例子。这就是儿童荡秋千。当观测儿童荡秋千时，会看到秋千达到最高点时他下蹲，（见图5.7），秋千到达最低点时他直立，以增加系统的势能。他利用一蹲一立给秋千提供能量，秋千就越荡越高。如果他的动作位相改变 $\frac{\pi}{2}$，即秋千到最高点时他直立，最低点时下蹲，则秋千就会越荡越低。儿童周期性地一蹲一立

就是振荡，相当于泵浦波；而秋千的往返摆动就相当于信号波。秋千振荡的加强或减弱与儿童动作位相有关。

秋千是个复摆，等效摆长与秋千顶点到儿童重心距离成正比，它是复摆的重要参数。儿童一蹲一立即周期性改变系统参数，通过有规律地调节系统参数而实现放大或振荡，这就是参数放大器或参数振荡器。

所谓光学参数振荡器就是用泵浦光周期性改变光学参数(介质极化强度)而实现另一频率光的振荡和放大。

若泵浦波频率为 ω_p，信号光频率 $\omega=\frac{1}{2}\omega_p$，$\omega_p=2\omega$，称为简并参数振荡；若 $\omega_p=\omega_1+\omega_2$，而 $\omega_1\neq\omega_2$ 为非简并参数振荡。

2. 参数振荡产生压缩光理论

考虑在 Fabry-perot(法布里-珀罗)谐振腔中放置非线性介质，其中存在两种频率光：ω_1 和它的二次谐波 $2\omega_1$，系统的哈密顿量为

$$H=H_1+H_2$$

$$H_1=\hbar\omega_1\hat{a}_1^+\hat{a}_1+2\hbar\omega_1\hat{a}_2^+\hat{a}_2+\mathrm{i}\frac{\hbar k}{2}(\hat{a}_1^{+2}\hat{a}_2-\hat{a}_1^2\hat{a}_2^+)$$

$$+\mathrm{i}\hbar(E_1\hat{a}_1^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1t}-E_1^*\hat{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1t})+\mathrm{i}\hbar(E_2\hat{a}_2^+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_1t}-E_2^*\hat{a}_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_1t})$$

$$H_2=a_1\Gamma_1^++a_1^+\Gamma_1+a_2\Gamma_2^++a_2^+\Gamma_2$$

(5.38)

其中 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 是频率为 ω_1 和 $2\omega_1$ 模式的玻色算符，κ 为两模式相互作用的耦合常数，一般取实数；Γ_1 和 Γ_2 为热库算符，反映两模式在腔中的损失，E_1 和 E_2 正比于相干驱动场振幅。

通过对热库变数求迹后，得到腔模式密度算符主方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{i}k}[H,\rho]+(L_1+L_2)\rho \qquad (5.39)$$

其中

$$L_i=\gamma_i(2\hat{a}_i\rho\hat{a}_i^+-\hat{a}_i^+\hat{a}_i\rho-\rho\hat{a}_i^+\hat{a}_i)$$

γ_i 是腔中 i 模式衰减率。由于压缩态在普通的 Glauber—Sudarshan P 表示中是奇异的，所以只能用复 P 表示。在复 P 表示中 C 数的福克-普朗克方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P(\vec{\alpha}) = \{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\gamma_1\alpha_1 - E_1 - \kappa\alpha^+\alpha_2) + \frac{\partial}{\partial\alpha_1^+}(\gamma_1\alpha_1^+ + E_1^+ - \kappa\alpha_1\alpha_2^+)$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\gamma_2\alpha_2 - E_2 + \frac{\kappa}{2}\alpha_1^2) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2^+}(\gamma_2\alpha_2^+ - E_2^+ + \frac{k}{2}\alpha_1^{+2})$$

$$+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}(\kappa\alpha_2) + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^{+2}}(\kappa\alpha_2^+)]\}P(\vec{\alpha}) \qquad (5.40)$$

其中 $\vec{\alpha}=(\alpha_1\alpha_2^+\alpha_2\alpha_2^+)$，在推导中利用了转动波近似并做以下代换。

$$\alpha_1\rightarrow\alpha_1\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t) \qquad \alpha_2\rightarrow\alpha_2\exp(-2\mathrm{i}\omega_1 t)$$

在复 P 表示中，α 和 α^+ 是独立复变数。P 表示变化来自四个复变数的变化，从随机过程理论知道，福克-普朗克方程等价于四个变数的随机微分方程，为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1^+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1+\kappa\alpha_1^+\alpha_2-\gamma_1\alpha_1\\ E_1^++\kappa\alpha_1\alpha_2^+-\gamma_1\alpha_1^+\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\kappa\alpha_2 & 0\\ 0 & \kappa\alpha_2^+\end{pmatrix}^{1/2}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_1^+(t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2^+\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}E_2-\frac{\kappa}{2}\alpha_1^2-\gamma_2\alpha_2\\ E_2^+-\frac{\kappa}{2}\alpha_1^{+2}-\gamma_2\alpha_2^+\end{bmatrix}$$

$$(5.41)$$

其中 $\eta_1(t)$，$\eta_1^+(t)$是由扩散项引入的 δ 相关随机力，有零平均值为

$$\langle\eta_1(t)\rangle=\langle\eta_1^+(t)\rangle=0$$
$$\langle\eta_i(t)\eta_j^+(t')\rangle=\delta_{ij}\delta(t-t') \qquad (5.42)$$

半经典或平均值方程可直接从(5.41)式中引入，只要取随机项为0，并用 α_i^* 代替 α_i^+ 得半经典方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_1=E_1+\kappa\alpha_1^*\alpha_2-\gamma_1\alpha_1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_2=E_2+\frac{\kappa}{2}\alpha_1^2-\gamma_2\alpha_2 \qquad (5.43)$$

方程可以用来讨论参数振荡及二次谐波的产生，对于参数振荡，即频率$2\omega_1$模式被泵浦，可以取$E_1=0$，对于稳定态$\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}t}=0$，我们分别从阈值下与阈值上给出解的形式，阈值为

$$E_{2c}=\gamma_1\gamma_2/\kappa$$

当$E_2>E_{2c}$时

$$\alpha_2^0=\frac{\gamma_1}{\kappa}$$

$$\alpha_1^0=\pm\left[\frac{2}{\kappa}(E_2-E_{2c})\right]^{1/2}$$

当$E_2<E_{2c}$时

$$\alpha_1^0=0 \qquad \alpha_2^0=\frac{E_2}{\gamma_2}$$

其结果如图5.8所示，其中取$\kappa=1.0$，$E_{2c}=4.0$。

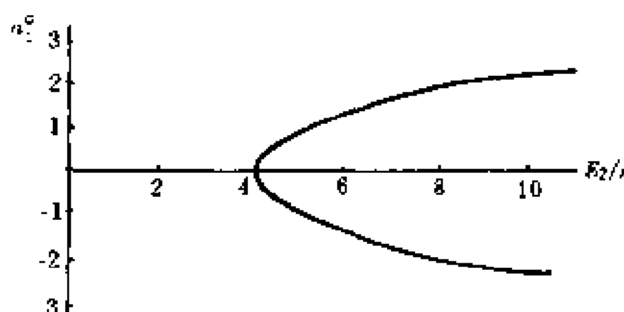


图 5.8

3. 压缩谱

为计算压缩谱，将Fokker－Planck方程线性化，线性化后的位移矩阵与扩散矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}\gamma_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_1^* & 0\\ -\varepsilon_2^* & \gamma_1 & 0 & -\varepsilon_1\\ \varepsilon_1 & 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_1^* & 0 & \gamma_2\end{bmatrix} \tag{5.44}$$

$$D=\begin{bmatrix}\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中$\varepsilon_1=\kappa\alpha_1^0$，$\varepsilon_2=\kappa\alpha_2^0$。在扩散矩阵中直接用$\alpha_2^0$代替$\alpha_2$，通过线性化可以解出$\alpha_1$和$\alpha_2$而计算谱矩阵，相应谱矩阵为

$$S_i^{out}(\omega)=1+:S_i^{out}(\omega):$$

符号::表示正规乘积，即

$$:S_i^{out}(\omega): = \int\langle :X_i^{out}(t),X_i^{out}(0):\rangle e^{-i\omega t}dt$$

利用已解出的 α_1,α_2 可以求出 X_i，代入上式可以求出压缩谱，对于低频模 ω_1 的压缩谱为

$$S_{1\pm}^{out}(\omega)=1\pm\frac{4\gamma_1|\varepsilon_2|(\gamma_2^2+\omega^2)}{[\gamma_2(\gamma_1\mp|\varepsilon_2|)+|\varepsilon_1|^2-\omega^2]^2+\omega^2(\gamma_1\mp|\varepsilon_2|+\gamma_2)^2} \tag{5.45}$$

其中＋和－分别表示振幅和位相的正交分量，对于高频模 $(2\omega_1)$ 压缩谱

$$S_{2\pm}^{out}(\omega)=1\pm\frac{4\gamma_2|\varepsilon_2|(\varepsilon_1)^2}{[\gamma_2(\gamma_1\mp|\varepsilon_2|)+|\varepsilon_1|^2-\omega^2]^2+\omega^2(\gamma_1\mp|\varepsilon_2|+\gamma_2)^2} \tag{5.46}$$

对于参数振荡 $\varepsilon_1=0$，在阈值下可较大的简化压缩谱的表达式，对于位相的正交分量，压缩谱有

$$S_{1-}^{out}(\omega)=1-\frac{4\gamma_1(\varepsilon_2)}{(\gamma_1+|\varepsilon_2|)^2+\omega^2} \tag{5.47}$$

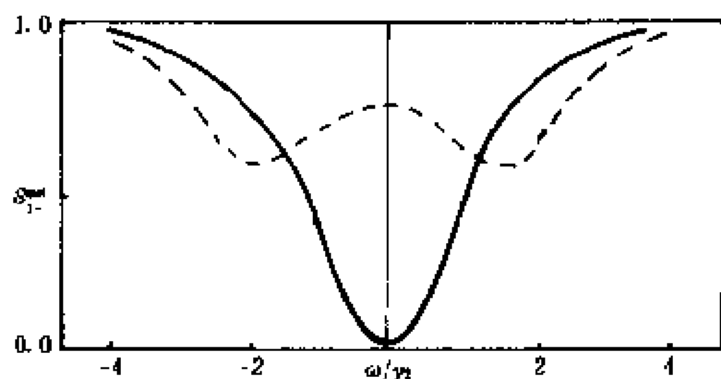


图 5.9

图5.9给出参数振荡的压缩谱，取 $\gamma_1=2\gamma_2$，实线对应阈值上且 $\varepsilon_2=\gamma_1$，而虚线对应超阈值且 $\varepsilon_2=\gamma_2$。可见对 $\varepsilon_2=\gamma_1$，存在一个 Lorentz 凹陷，给出 $S_{1-}^{out}(0)=0$，而超阈值时（虚线所示）有两个凹陷，最大压缩对应 $\omega=\pm|\varepsilon_1|$，这时要求

$$|\varepsilon_1|^2>\gamma_2^2\{[\gamma_2^2+(\gamma_2+2\gamma_1)^2]^{1/2}-(\gamma_2+2\gamma_1)\} \tag{5.48}$$

如果在泵浦频率处腔的损失较大，无关的真空涨落带入信号，将使压缩减少，在参量振荡器中为了在阈值上得到较好压缩，必须使腔的损失小于信号损失。

4. 参数振荡器产生压缩光实验

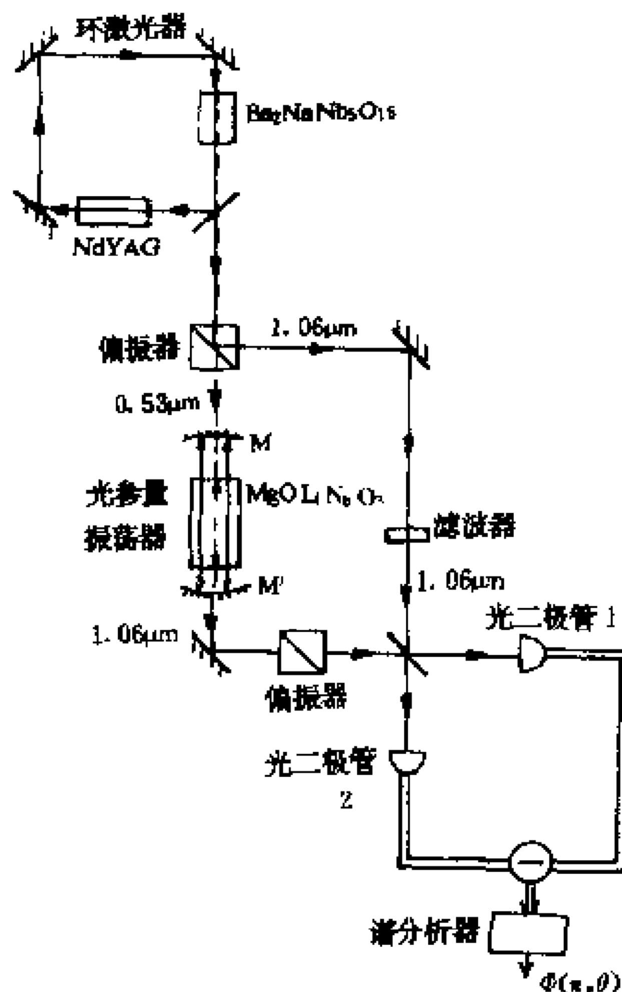


图 5.10 参数振荡器产生压缩光实验装置

利用光学参数振荡器产生压缩光的第一个实验是由吴令安等人在1987年完成的[6]。基本仪器安装如图5.10所示。中心器件是由 $MgOLiNbO_3$ 晶体构成的光学参数振荡器。振荡器由 Nd:YAG 激光器在0.53μm 处泵浦，倍频输出，压缩光产生于1.06μm 处，通过端

腔镜，镜对0.53μm光完全反射。为提供1.06μm的本地振荡将原始Nd:YAG激光器的部分输出，通过分束器与偏振器而输出到平衡零差探测器的另一通道，其位相通过滤波器调整以适应测量需要。真空噪声水平由压缩光的阻塞决定，以使真空场是入射到零差探测器的进入通道。

实验给出最佳噪声水平比真空涨落减少61%，最佳压缩与泵浦功率有关，实验结果与理论公式(5.47)能较好地符合。实验表明光学参数振荡器产生的压缩态是相干压缩态。

§5-4 四波混频产生光学压缩态

四波混频是激光在非线性介质中出现的一种十分重要的光学效应，可以用它来产生位相复共轭波，复共轭光与原始光相干可以产生光学压缩态，第一次光学压缩态的观测就是利用了四波混频。本节首先介绍四波混频的意义，然后介绍四波混频理论及产生压缩态的实验。

1. 四波混频的意义

四波混频是利用了光学介质的三阶非线性效应。若介质在三个波场 E_1，E_2和 E_3作用下，为简单化，三个波取单色平面波，其电场为

$$E_i=\frac{1}{2}A_i(r)\exp[i(\omega_i t-\vec{k}\cdot\vec{r})]+c.c.$$

在介质中产生三阶非线性极化强度

$$P^{(3)}=\frac{\varepsilon_0}{2}\chi^{(3)}_{ijkl}(-\omega_4,\omega_1,\omega_2-\omega_3)A_{1j}(r)A_{2l}(r)A^*_{3l}(r)$$
$$\cdot\exp i[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3)\cdot\vec{r}]+c.c. \qquad (5.49)$$

其中 $\chi^{(3)}$为介质三阶非线性极化率，如果三个入射波频率相同，即 $\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega$，且 $\vec{k}_1+\vec{k}_2=0$，则(5.49)式变成

$$P_i^{(3)}=\frac{\varepsilon_0}{2}\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega,\omega,\omega-\omega)A_{1j}A_{2k}A_{3l}^*\exp[i(\omega t+\vec{k}_3\cdot\vec{r})]+c.c.$$

$$(5.50)$$

表明感应电极化强度产生一个频率为 ω、方向为 $-\vec{k}_3$的波，它是 E_3场的位相复共轭波。这种频率相同的四个波混频称为简并四波混频。其过程示意图如图5.11所示。如果忽略 $\vec{E}_1$和 $\vec{E}_2$振幅变化和介质损耗，E_3取慢变化振幅近似，则由麦克斯韦方程给出的耦合方程为

$$\frac{\partial A_3}{\partial z}=-i\chi^* A_4^* \qquad \frac{\partial A_4}{\partial z}=i\chi^* A_3^*$$

其中

$$\chi^*=\frac{2\pi\omega}{nc}\chi^{(3)}A_1A_2$$

取介质长度为 L，输入波在 $z=0$时振幅为 $A_3(0)$，而 $z=L$ 时 $A_4(L)=0$，可以解得

$$A_4(0)=i(\frac{\chi^*}{|\chi|}\tan|\chi|L)A_3^*(0) \qquad (5.51)$$

而在 $z=L$ 处，出射波为

$$A_3^*(L)=\frac{A_3^*(0)}{\cos|\chi|L}$$

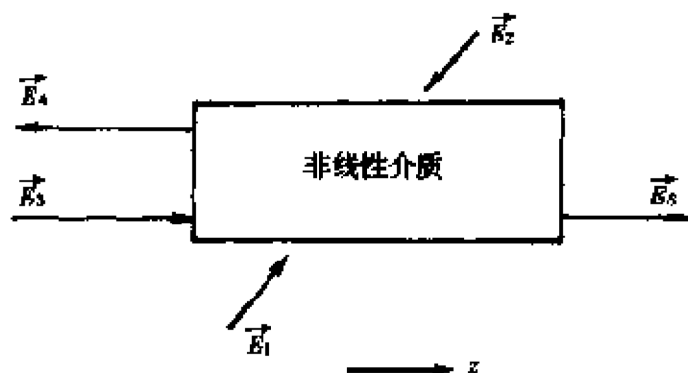


图 5.11

看出 $A_3(L)$总是大于入射波 $A_3(0)$，能量增加来自泵浦波作用，而

位相复共轭波 $A_4(0)$可以大于或小于入射波。

位相复共轭波是一种非常特殊的波。有一个单色平面波，其频率为 ω，在 z 方向的传播可以表示为

$$E(r,t)=\frac{1}{2}A(r)e^{-i(\omega t-kz)}+c.c.$$

$A(r)$为慢变化的复振幅，它的位相复共轭波为

$$E_c(r,t)=\frac{1}{2}A_c(r)e^{-i(\omega_c t-k_c z)}+c.c.$$

其中 $\omega_c=\omega, k_c=-k, A_c=A^*$。一个物理系统如果能在原始波入射后产生位相复共轭波，称为位相共轭镜或位相共轭器，相应复共轭波为

$$E_c(r,t)=\frac{1}{2}A^*(r)e^{-i(\omega t+kz)}+\frac{1}{2}A(r)e^{i(\omega t-kz)} \tag{5.52}$$

则表明位相共轭波等价原始波的时间反演波，位相共轭波将在 $-z$ 方向传播的位相与原来的相反。

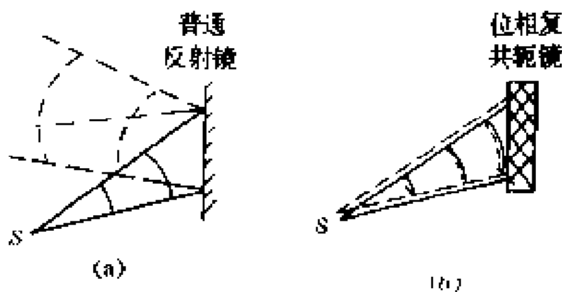


图 5.12

图5.12给出普通平面反射镜与位相共轭镜反射波特性的比较，实线为入射波，均从光源 S 发出，虚线为反射波。普通平面镜反射波为发散波，则位相共轭镜的反射波是一个会聚光波，此光束可以沿入射光束路径返回。如果入射波是一个相干光，而位相复共轭波可以处在压缩态。

入射光用算符 $\hat{a}$ 表示，其位相复共轭波可表示为

$$\hat{b}=\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^+ \tag{5.53}$$

若 $\mu^2-\nu^2=1$，从双光子态讨论知，位相复共轭光将处于压缩态。在四波混频中泵浦光很强，可以用经典场处理，非线性极化率为

$$\chi^{(3)}(E)=\chi^{(3)}E^2$$

其中 E 为泵浦光场，$\chi^{(3)}$是介质的三阶极化率，在简并四波混频时，相互作用的哈密顿量为

$$\hat{H}_I=\hbar[\chi^{(3)*}E^2\hat{a}^2+\chi^{(3)}E^2\hat{a}^{+2} \tag{5.54}$$

若初时在真空态$|0\rangle$，t 时刻

$$|t\rangle=|0_E\rangle=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_It/\hbar|0\rangle$$

$$=\exp(\frac{1}{2}\varepsilon^*\hat{a}^2-\frac{1}{2}\varepsilon\hat{a}^{+2})|0\rangle \tag{5.55}$$

其中压缩参数为

$$\varepsilon=2\mathrm{i}\chi^{(3)}E^2t=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

则压缩系数 $s=2\chi^{(3)}E^2t$，压缩随 t 的增加而增加，这里没考虑损耗。

2. 四波混频全量子理论

考虑三个谐振模场和 N 个二能级原子系统作用，整个系统的哈密顿量，在转动波与偶极近似下可写为

$$H=\sum_{\mu=0}^{4}H_\mu \tag{5.56}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_0&=\hbar\sum_{j=1}^{3}\omega_j\hat{a}_j^+\hat{a}_j+\frac{1}{2}\hbar\omega_i\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z\\
H_1&=\mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sum_{j=1}^{3}g\hat{a}_j^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j r_i}+h.c.\\
H_2&=\mathrm{i}\hbar\hat{a}_1^+E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t}+h.c.\\
H_3&=\sum_{i=1}^{N}(\Gamma\sigma_i^++\Gamma^+\sigma_i^-+\Gamma_p\sigma_i^z)\\
H_4&=\sum_{j=1}^{3}(\Gamma_c\hat{a}_j^++\Gamma_c^+\hat{a}_j)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

式中 H_0是自由原子和模场的哈密顿量;H_1是场与原子的相互作用,H_2是驱动场 E 对腔模 ω_1的作用,H_3和 H_4表示衰减,H_3是原子与热库作用,它可以是碰撞或自发辐射,H_4是腔模的衰减,$h.c.$ 表示厄米共轭,$\hat{a}_1$是频率 ω_1泵浦模式湮灭算符,ω_2与 ω_3是两个边带膜的湮灭算符,其频率关系为

$$2\omega_1=\omega_2+\omega_3 \qquad \omega_2=\omega_1-\Omega \qquad \omega_3=\omega_1+\Omega$$

驱动场频率为 ω_r,要求 $\omega_1-\omega_r\ll\Omega$,以至只有 ω_1能有效地被泵浦。

原子系统和场的密度算符的主方程,是从整个系统密度算符的海森堡方程对热库算符求迹后给出的,利用马尔科夫和玻恩近似得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}[H_0+H_1+H_2,\rho]+L_3(\rho)+L_4(\rho) \qquad (5.58)$$

其中非么正项是

$$L_3[\rho]=\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\gamma_{11}}{2}([\sigma_i^-\rho,\sigma_i^+]+[\sigma_i^-,\rho\sigma_i^+])$$

$$+\Big(\frac{\gamma_p}{4}([\sigma_i^z\rho,\sigma_i^z]+[\sigma_i^z,\rho\sigma_i^z]) \qquad (5.59)$$

$$L_4[\rho]=\sum_{j=1}^{3}\kappa([\hat{a}_j\rho,\hat{a}_j^+]+[\hat{a}_j,\rho\hat{a}_j^+]+2\bar{n}([[\hat{a}_j,\rho],\hat{a}_j^+]))$$

式中 κ 是腔的衰减率,$\bar{n}$ 是外场中平均热光子数,γ_{11}为自发辐射率,γ_p 是引起偶极子衰减的碰撞率,假定原子热库处在低温,则定义横原子衰减率 $\gamma_\perp$为

$$\gamma_\perp=\gamma_p+\frac{\gamma_{11}}{2}$$

利用复 P 表示可以给出 C 数的福克 普朗克方程,并利用 Ito 规则可以写出等价的随机微分方程,详细推导可参阅 Reid 和 Walls 的原始文章。

最后得到场振幅 α,原子极化率 v 和原子数反转 D 的随机微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=E\exp(-\mathrm{i}\omega_p t)-(\kappa-\mathrm{i}\omega_1)a+g\nu+\Gamma_a \quad (5.60\mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}=(\gamma_\perp+\mathrm{i}\omega_0)\nu+gaD+\Gamma_\nu \quad (5.60\mathrm{b})$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\gamma_{11}(D+\mathrm{N})-2g(\nu^+a+\nu a^+)+\Gamma_D \quad (5.60\mathrm{c})$$

在复 P 表示中，a、a^+、ν、ν^+ 是独立复变数，Γ 表示平均值为零的高斯噪声函数，反映量子噪声作用，量子噪声相关函数为

$$\langle\Gamma_\nu(t)\Gamma_\nu(t')\rangle=2ga\gamma\delta(t-t')$$

$$\langle\Gamma_D(t)\Gamma_D(t')\rangle=[2\gamma_{11}(D+N)-kg(\nu^+a+\nu a^+)]\delta(t-t')$$

$\gamma_\perp$ 与 γ_{11} 分别是二能级原子横向与纵向的衰减率，在非简并情况下，极化率 ν 振荡可存在各种频率，但如果在强场 a_1 的泵浦下，感兴趣的只是弱场模式 a_2 和 a_3，则对极化率振荡感兴趣的是其中三个频率，ω_p 和 $\omega_p\pm\Omega$，其对应振幅 a_1，a_2 和 a_3，这时振幅、极化率和反转粒子数的富氏分量为

$$a=a_1\exp(-\mathrm{i}\omega_p t)+a_2\exp[-\mathrm{i}(\omega_p-\Omega)t]+a_3\exp[-\mathrm{i}(\omega_p+\Omega)t] \quad (5.61\ \mathrm{a})$$

$$\nu=\nu_1\exp(-\mathrm{i}\omega_p t)+\nu_2\exp[-\mathrm{i}(\omega_p-\Omega)t]+\nu_3\exp[-\mathrm{i}(\omega_p+\Omega)t] \quad (5.61\ \mathrm{b})$$

$$D=D_1+D_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}+D_2^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} \quad (5.61\ \mathrm{c})$$

对于 a_i，ν_i 和 D_i 的随机微分方程，可用(5.61)式代入(5.60)式得出，取近似 $\mathrm{d}\nu_i/\mathrm{d}t=\mathrm{d}D_i/\mathrm{d}t=0$时，则

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}=E-\kappa(1+\mathrm{i}\theta)a_1-\frac{2c\kappa a_1}{(1+\mathrm{i}\Delta)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{1+\Delta^2}\right)}+\Gamma_{a_1}(t) \quad (5.62\ \mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}=\kappa[1+\mathrm{i}\theta+\gamma(\delta)]a_2+\kappa\chi(\delta)a_3^+\exp(2\mathrm{N}\varphi_0)+\Gamma_{a_2}(t) \quad (5.62\ \mathrm{b})$$

$$\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}=-\kappa[1+\mathrm{i}\theta+\gamma(-\delta)]a_3+\kappa\chi(-\delta)a_2^+\exp(2\mathrm{i}\varphi_0)+\Gamma_{a_3}(t)$$

(5.62 c)

其中 $\theta=(\omega_1-\omega_r)/\kappa$ 是谐振标度失调，$\Delta=(\omega_0-\omega_r)/\gamma_\perp$ 为中心泵浦频率与原子频率的标度失调，$\delta=\Omega/\gamma_{11}$ 为边模相对中心频率的标度差；$c=g^2N/2\gamma_\perp\kappa$ 为谐振腔的协调参数，$I=|a_1^{ss}|^2/n_0$ 是稳态腔内泵浦相对强度，其中 $n_0=\gamma_{11}\gamma_\perp/4g^2$。噪声项有 $\langle\Gamma_i(t)\rangle=0$，具有 δ 型相关性质

$$\langle\Gamma_{a_2}(t)\Gamma_{a_3}(t')\rangle=\kappa R\exp(2N\varphi_0)\delta(t-t')$$

$$\langle\Gamma_{a_2}(t)\Gamma_{a_2}^+(t')\rangle=\langle\Gamma_{a_3}(t)\Gamma_{a_3}^+(t')\rangle=\kappa L\Lambda\delta(t-t')$$

对于四波混频的一种理想压缩情况是无损耗，即 $\gamma=0$，$\Lambda=0$，且 $R=\chi(\delta)=\chi(-\delta)$。

实验测量的量是传输的压缩谱，压缩情况是利用零差探测器来探测。输出边模频率为 $\omega_p\pm\Omega$，而本地振动 $E_{L0}=E\exp(i\varphi_{L0})$，相对频率为 ω_r，驱动场相移为 φ_{L0}，边模振动与本地振动通过束分离器打在光电探测器上产生光电流。谱分析器可以测量以频率 Ω 涨落的电流 $i(\Omega)$，谱的涨落 $\langle i^2(\Omega)\rangle-\langle i(\Omega)\rangle^2$ 正比于正交相 X_φ 的均方差 $V(x_\varphi)$

$$X_\varphi=a_{2\mathrm{out}}\exp(-\mathrm{i}\varphi_{LO})+a_{3\mathrm{out}}^+\exp(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{LO}})$$

$$V(X_\varphi)=\frac{1}{2}(\langle X_\varphi X_\varphi^+\rangle+\langle X_\varphi^+X_\varphi\rangle)-\langle X_\varphi^+\rangle\langle X_\varphi\rangle$$

正交相涨落均方差与谱矩阵有关，谱矩阵定义为

$$S_{ij}(\omega,\delta)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\langle\alpha_i(t)\alpha_j(0)\rangle\mathrm{d}t$$

最佳涨落出现在 $\omega=0$ 情况，调整本地振荡位相 φ_{L0} 以得到最佳压缩，相应正交相方差为

$$V(X_\varphi,\delta)=1+2\kappa[S_{12}(0,\delta)+S_{34}(0,\delta)-2|S_{13}(0,\delta)|]$$

若测到 $V(X_\varphi,\delta)<1$ 表示有压缩，图5.13给出正交相方差 V 与相对光强 I/I_S 关系，I_S 是泵浦频率的饱和强度，从图中看出对简并四波混频（$\delta=0$），只有 I/I_S 比较小时才有明显压缩，而对非简并四波混频，压缩将随 I/I_S 增加而加强。这是理想情况，因忽略了损耗。

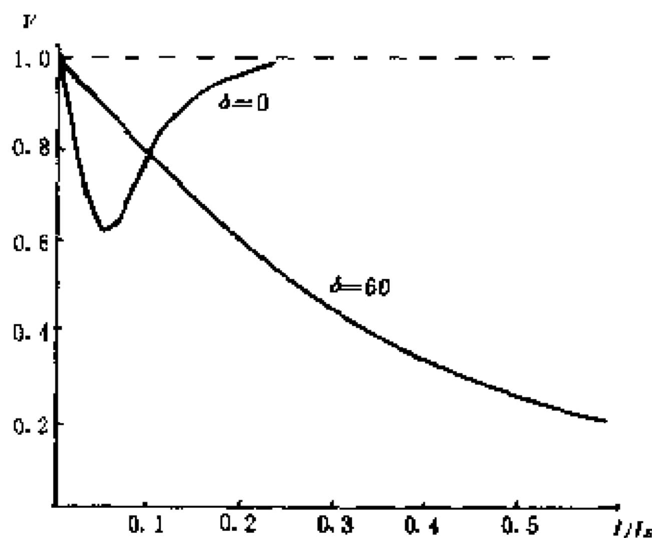


图 5.13

3. 四波混频压缩实验

图5.14给出 Slusher 等人第一次利用四波混频观测到压缩光的实验装置的示意图[5]。利用连续波环型染料激光器为光源。激光与 Na 原子束成90°通过，出射光成为压缩光，利用平衡零差探测器观测，估算噪声低于真空极限1dB，实测为0.7dB。

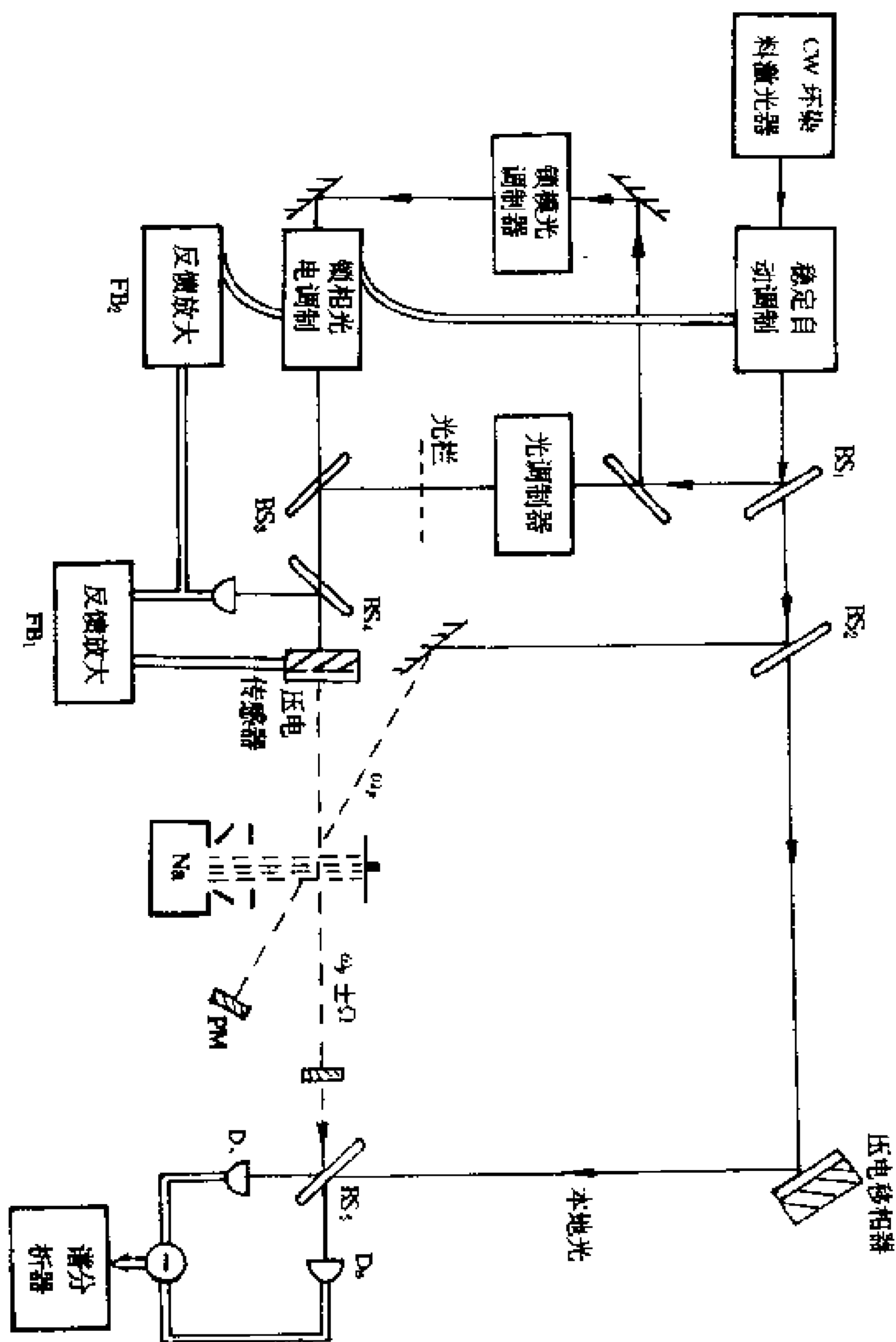

CW 环形染料激光器
稳定自动调制
光调制器
光栏
反馈放大
FB_2
FB_1
BS_1
BS_2
BS_3
BS_4
BS_5
压电传感器
Na
PM
D_1
D_2
压电移相器
本地光
谱分析器

图 5.14

染料激光器产生激光频率比 Na 的 D_2线高出1.5GHz，产生边模频差 $\Omega=\pm595$MHz，设备工作稳定性利用锁模自动光调制器完成。调制器信号来自压缩器的反馈，压电传感器前反射镜反射率 $r=0.999$，透射微弱信号通过反馈放大系统 FB_1和 FB_2放大后，控制稳定自动调制器，利用零差探测器观测信号，利用压电控制器调整本地激光的位相 Φ_{LO}。

图5.15给出平衡零差探测器所测噪声与本地激光相角 φ_{LO}的关系，水平虚线代表真空噪声，看出当 Φ_{LO}在$\frac{\pi}{2}$与$\frac{3\pi}{2}$处的噪声低于真空涨落，表示产生了压缩光。实验条件取 $\delta=60$，$\Delta=400$，谐振腔协调参数 $c=1000$，$I/I_S=0.056$，原子密度$10^{11}\sim10^{12}\text{cm}^{-3}$。

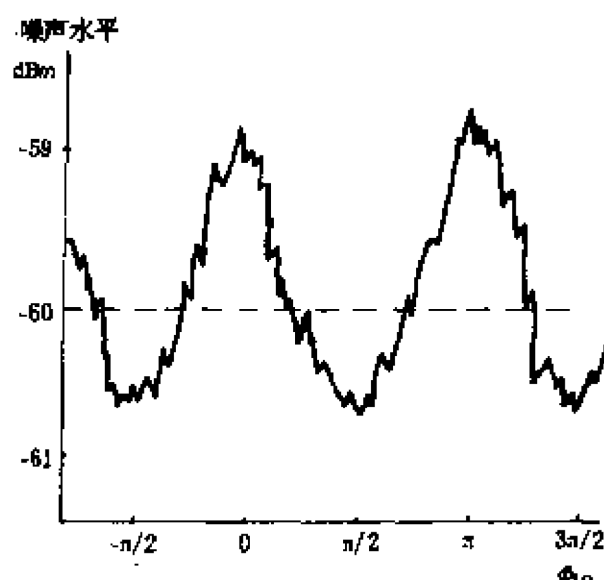


图 5.15

§5-5 光学压缩态的可能应用

由于压缩光具有比真空态更小的噪声，因此在低本、底弱信号测量中有广泛的应用前景。下面仅介绍在低噪声光通信和引力波检测中可能带来的应用。

1. 低噪声光通信

降低系统噪声提高信噪比是通信领域中的核心问题。在光纤通信系统中的电路噪声和背景本底噪声可以通过装置改进而逐步

消除，只有真空涨落引起的量子噪声是无法回避的。光通信系统信噪比的最后限制是由量子效应给出，这一限制称为量子极限。能否克服量子极限而提高信噪比呢?答案是肯定的，一种方法就是改变光波的量子态，采用压缩光。

单模场 E 可以分解为两个独立分量

$$\hat{E}=\hat{x}_C\cos\omega t+\hat{x}_S\sin\omega t$$

其中 $\hat{x}_C$ 和 $\hat{x}_S$ 称为正交振幅，原则上人们能独立调制这两分量，以使它们传递不同的信息，因此 $\hat{x}_C$ 和 $\hat{x}_S$ 是不对易的，满足以下测不准关系

$$\langle\Delta\hat{x}_C^2\rangle\langle\Delta\hat{x}_S^2\rangle\geqslant\frac{1}{16}$$

这方程显示光量子性质引起的量子噪声。若光信号是在相干态，则两成份的量子噪声相同

$$\langle\Delta\hat{x}_C^2\rangle=\langle\Delta\hat{x}_S^2\rangle=\frac{1}{4}$$

若用 $\hat{x}_C$ 分量传递信息，信噪比(SNR)为

$$\mathrm{SNR}=\frac{\langle\hat{x}_C\rangle^2}{\langle\Delta\hat{x}_C^2\rangle}$$

当信号为相干态，上方程有

$$\mathrm{SNR}=4\langle n\rangle \tag{5.63}$$

其中 $\langle n\rangle$ 是每一比特中平均光子数．由于测量 $\hat{x}_C$ 的几率密度是高斯型的，则误差几率为

$$P_e=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{4\langle n\rangle}}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \tag{5.64}$$

看出标准量子几率误差几率随 $\langle n\rangle$ 增加而指数减少，如图5.16所示。

量子极限不仅与光的量子性质有关，也与测量过程有关。现在考虑传输信号是相干态，如何使测量过程最佳化。这个问题在1967年首先由 Helstrom 解决，他认为最佳测量过程，对应最小的误差几

率，给出

$$P_e=\frac{1}{2}[1-\sqrt{1-\exp(-4\langle n\rangle)}] \tag{5.65}$$

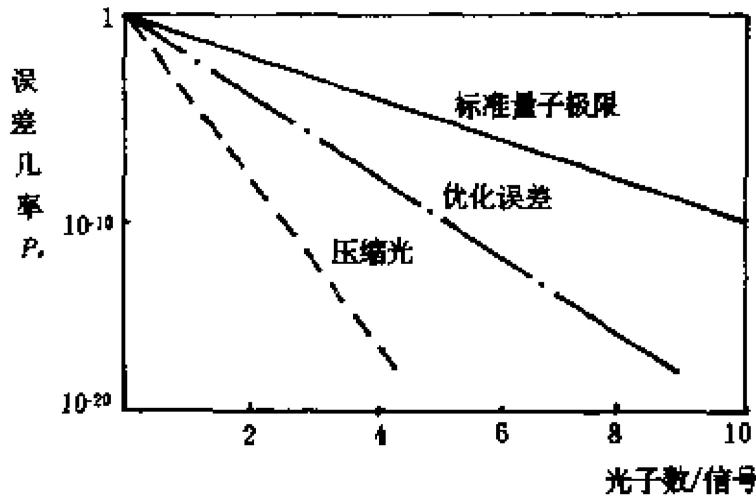


图 5.16 接受器的误差几率

图5.16给出最佳量子接受器的优化误差，和在标准量子极限误差的比较，表明如果能采用最佳量子接受器，可以克服标准量子极限的限制。

为提高信噪比，除改进接受器外，还要改进传递信号，使信号由一般相干光改为压缩光，压缩光是由相干光通过压缩器产生，光被压缩后振幅减少，如果初始相干光振幅很大，则压缩后仍有较大振幅，以供在光纤中传播，压缩后的光振幅为

$$A=(\mu-\nu)|\alpha|\cos\varphi \tag{5.66}$$

信号由外位相调制，当 $\varphi=0,\pi$ 时，信号量子噪声为

$$\langle\Delta x_c^2\rangle=\frac{1}{4(\mu-\nu)^2}$$

调制后的信噪比为

$$\mathrm{SNR}=\frac{4A^2}{(\mu-\nu)^2} \tag{5.67}$$

如果传输信道中没有能量损失，对压缩光的误差几率如图5.16中

虚线所示。

2. 引力波的探测

一个令人十分感兴趣的压缩态的应用是引力波的探测，它可提高干涉仪探测器的灵敏度。

图5.17给出一个为引力波探测用的激光干涉仪的示意图。为明确装置如何工作，必须回忆引力波的某些性质。一个引力波在垂直于传播方向的平面内引起弱潮力，一引力波垂直通过有一定质量的圆环，周期性力使圆环成为椭圆，在图5.17所示干涉仪中，两谐振腔的末端镜处在圆上相差90°，当引力波垂直作用在干涉仪平面上时，一个谐振腔将加长，另一个将缩短，如果这变化能被干涉仪记录的话，这调制的频率正好是引力波的频率。

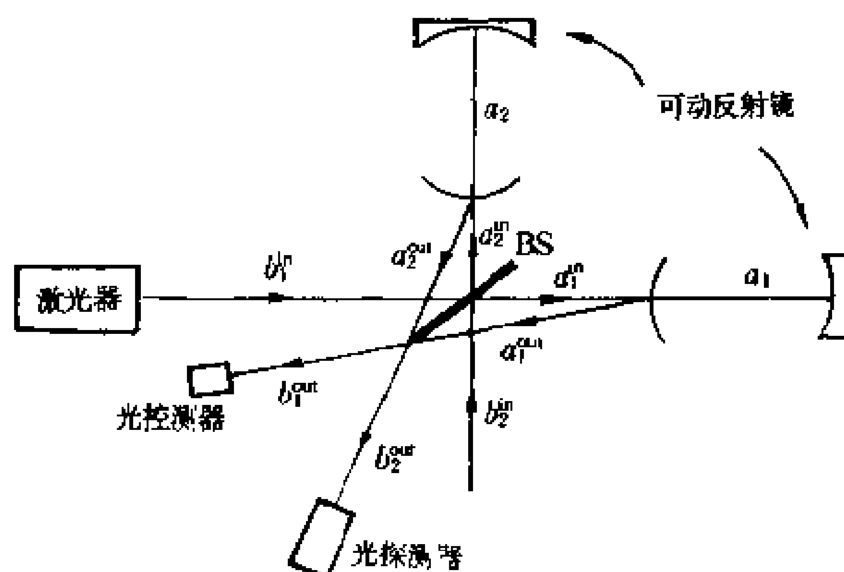


图 5.17 引力波探测的激光干涉仪

但必须看到，引力波作用是非常弱的，它对两谐振腔长度的影响，往往湮灭在各种噪声之中。为消除干扰必须采取一些措施，首先消除由于地震可能引起的作用，另外要防止热运动带来的影响，排除这些外，光的噪声也将限制装置的灵敏度。光噪声分两方面，

一是散粒噪声，二是辐射压强。散粒噪声的信噪比将正比于入射功率的平方根，但不幸的是辐射功率加大将增加辐射压强，引起作用在末端镜上的随机力，这力作用将明显大于引力波的作用。

从上讨论看来，利用光干涉来观测引力波已没有希望，但下面分析指出，如果利用压缩光，有可能实现引力波的干涉。在理论计算中，将每个末端反射镜看成一个衰减的简单谐振子，它受到零点涨落和引力波的驱动力，忽略热运动影响，但考虑辐射压强力和谐振腔场的涨落。

腔内场用湮灭算符 $\hat{a}_i(i=1,2)$ 表示，每个腔的输入和输出场用 $\hat{a}_i^{in}$ 和 $\hat{a}_i^{out}$ 表示，而 $\hat{b}_i^{in}$ 和 $\hat{b}_i^{out}$ 表示干涉仪每个臂的输入与输出场，如图5.17所示，其中 BS 为中心束分离器，谐振腔的输入输出和干涉仪的输入输出量关系为

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^{in} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1^{in}+i\hat{b}_2^{in}) \\
\hat{a}_2^{in} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1^{in}-i\hat{b}_2^{in}) \\
\hat{b}_1^{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^{out}+i\hat{a}_2^{out}e^{i\varphi}) \\
\hat{b}_2^{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^{out}-i\hat{a}_2^{out}e^{i\varphi})
\end{aligned} \tag{5.68}$$

其中 φ 是插在干涉仪臂 2 中的可控相移，以便消除两臂输出强度差的直流部分，测量信号用算符表示为

$$\begin{aligned}
\hat{I}(t) &= (\hat{b}_1^{out})^+\hat{b}_1^{out} - (\hat{b}_2^{out})^+\hat{b}_2^{out} \\
&= -i[(\hat{a}_2^{out})^+\hat{a}_1^{out}e^{-i\varphi} - h.c.]
\end{aligned} \tag{5.69}$$

谐振腔末端反射镜看成一个简单的量子谐振动系统，坐标与动量算符为 $\hat{Q}$,$\hat{P}$，辐射压强力正比于腔内光子数，系统总哈密顿量可以写为

$$\hat{\mathscr{H}}=\hbar\Delta\hat{a}^{+}\hat{a}-\frac{\hat{P}^{2}}{2M}+\frac{M\Omega^{2}}{2}\hat{Q}^{2}-\hbar\frac{\omega_{0}}{L}\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{Q}+F(t)\hat{Q} \tag{5.70}$$

其中 M 是反射镜的质量，Ω 是反射镜的振荡频率，L 为谐振腔的长度，Δ 是谐振腔的解调。$F(t)$是引力波对反射镜的驱动力，若引力波产生加速度为

$$g(t)=g\cos(\omega_{g}t)$$

则力 $F(t)$可以写为

$$F(t)=-MhL\omega_{g}^{2}S(t) \tag{5.71}$$

其中 h 是由引力波引起谐振腔长 L 的最大改变。$S(t)=\cos(\omega_{g}t)$，在(5.70)式哈密顿量基础上，可以建立系统的量子随机微分方程，通过求解方程可以给出干涉仪最小可能探测的振幅 h。计算所用干涉仪的各项参数如表5-1所列。图5.18给出在压缩光情况下，最小可探测的振幅与输入压缩光功率之间关系，三条不同曲线分别对应压缩系数为 a $(r=0)$；b $(r=1)$；c $(r=2)$；(d)表示反射镜噪声的贡献。从图中看出利用压缩光干涉仪的探测灵敏度可以提高一个数量级，以使引力波的探测成为可能。

表5-1 干涉仪的实验参数值

物理量	符号	值
反射镜质量	M	10kg
镜特征角频	Ω	20π rad/s
反射镜阻尼	r_b	2π rad/s
谐振腔长	L	4m
反射率	R	0.98
激光功率	P	10W
激光角频	ω_0	3.66×10^{5} rad/s
引力波角频	ω_g	2000π rad/s

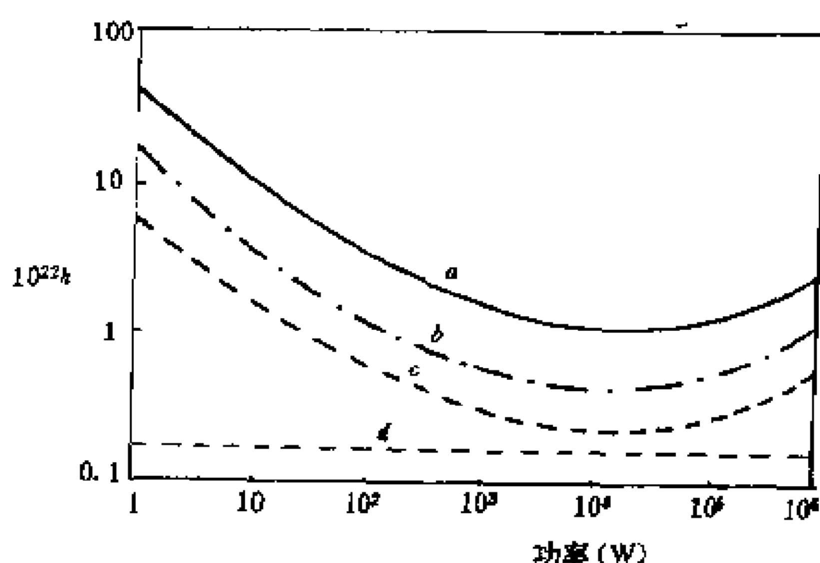


图 5.18 最小可探测的振幅 h 与输入功率关系

§5-6 振幅压缩态

以上各节介绍的是正交压缩相干态，其特点是一个正交相振幅的噪声低于真空涨落，若用这一分量携带信号，可以得到比相干态更大的信噪比。本节将介绍另一类压缩态是振幅压缩态，其特点是光子数的涨落小于相干态相应的涨落，即$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle<\langle\hat{n}\rangle$，这类压缩态也称为光子数压缩态。它满足光子数和位相最小测不准关系。本节先介绍振幅压缩态的意义，然后介绍其产生的方法。

1. 振幅压缩态的意义

在§3-1中我们引入光子的位相算符，定义位相 $\hat{\Phi}$ 的余弦和正弦算符为

$$\begin{aligned}\cos\hat{\Phi}&=\frac{1}{2}[(\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}\hat{a}+\hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}]\\ \sin\hat{\Phi}&=\frac{1}{2i}[(\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}\hat{a}-\hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}]\end{aligned}\qquad(5.72)$$

它们与光子数算符 $\hat{n}=\hat{a}^+\hat{a}$ 满足以下对易关系

$$[\hat{n}, \cos\hat{\Phi}] = -\mathrm{i}\sin\hat{\Phi}$$

$$[\hat{n}, \sin\hat{\Phi}] = \mathrm{i}\cos\hat{\Phi} \tag{5.73}$$

利用海森堡的测不准关系，给出光子数和正弦及余弦位相算符的不确定量，满足以下测不准关系

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\sin\hat{\Phi})^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\langle\cos\hat{\Phi}\rangle^2$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\cos\hat{\Phi})^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\langle\sin\hat{\Phi}\rangle^2 \tag{5.74}$$

光子数和位相最小测不准态对应于上面两式的等号，对于相干态 $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \langle\hat{n}\rangle$，则有

$$\langle(\Delta\sin\hat{\Phi})^2\rangle = \frac{\langle\cos\hat{\Phi}\rangle^2}{4\langle\hat{n}\rangle} \approx \frac{1}{4\langle\hat{n}\rangle}$$

若一个状态的光子数噪声小于相干态噪声，即

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle < \langle\hat{n}\rangle \tag{5.75}$$

即为振幅压缩态，或称粒子数压缩态。对于正交压缩相干态，当压缩方向沿着激发方向时，满足 $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \leqslant \langle\hat{n}\rangle^{2/3}$，显示出振幅压缩态的性质，下面将介绍产生振幅压缩态时，其粒子数涨落应满足 $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle < \langle\hat{n}\rangle^{1/3}$。

振幅压缩态与寻常正交压缩相干态一样，在光通信和信息处理方面有重要的潜在应用，特别在光通信中，振幅压缩态可以获得更大的频道容量。

2. 振幅压缩态的产生

有多种方法可以产生振幅压缩态，这里介绍的是利用非线性 Mach-Zehnder 干涉仪来产生，其原理图如图

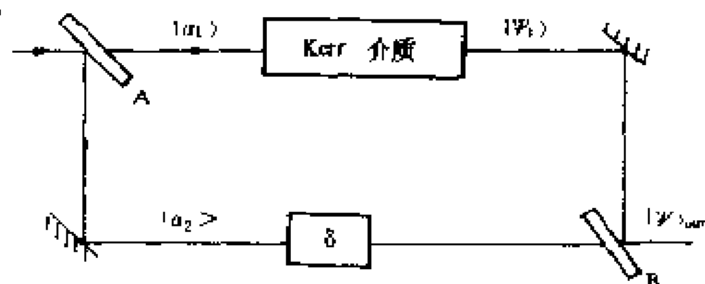


图 5.19

5.19所示。相干光通过分束器 A 分为$|\alpha_1\rangle$和$|\alpha_2\rangle$两束，干涉仪的一臂包括一个 Kerr 介质，另一臂有个时间延迟器δ，分别通过 Kerr 介质的光与延迟器的相干光，再通过有高反射率的束分离器 B 重新组合，δ使信号光在相空间产生一个位移，这位移角可以调整．它可以改变时间延迟和调整反射束强度达到，从而可以给出最佳的压缩性质。

必须指出振幅压缩态产生机制和正交压缩相干态有所不同，对于后者要求相应介质的相互作用哈密顿形式为

$$H_I=\hbar[\chi_{nl}(\hat{a}^+)^2+\chi_{nl}^+\hat{a}^2] \tag{5.76}$$

而要产生振幅压缩态要求相互作用哈密顿量具有以下形式[8]。

$$H_I=\hbar\chi_{nl}(\hat{a}^+)^2\hat{a}^2=\hbar\chi_{nl}\hat{n}(\hat{n}-1) \tag{5.77}$$

这样在 Kerr 介质中，单模光场的哈密顿量为

$$H=H_0+H_I \tag{5.78}$$

其中

$$H_0=\hbar\omega_0\hat{a}^+\hat{a}=\hbar\omega_0\hat{n}$$

$$H_I=\hbar\chi_{nl}\hat{n}(\hat{n}-1)$$

在旋转波近似下，非谐振参数χ_{nl}是实数的，它正比于非线性折射率n_2

$$\chi_{nl}=\frac{\hbar\omega_0^2n_2}{2c\varepsilon_0n_0^2A\tau} \tag{5.79}$$

其中A为光束的横截面积，τ是每个波包的时间长度，n_0和n_2分别为折射率的线性与非线性部分，介质折射率

$$n=n_0+\frac{1}{2}n_2|E_0|^2 \tag{5.80}$$

E_0是电场的复振幅，$E(z,t)=\frac{1}{2}E_0(z,t)e^{i(kz-\omega_0t)}$。当态矢量$|\alpha_1\rangle$通过 Kerr 介质后状态变为

$$|\Psi_k\rangle=U_k(L)|\alpha_1\rangle \tag{5.81}$$

$$U_k(L)=\exp[\frac{i}{2}r_L\hat{n}(\hat{n}-1)] \tag{5.82}$$

$$\tau_L = \frac{2\chi_{nl}L}{v} = \frac{\hbar\omega_0^2 n_2 L}{c^2\varepsilon_0 n_0 A\tau}$$

其中，L 是 Kerr 介质的长度。为了抑制由于相干光$|\alpha_2\rangle$带来的噪声，分束器 B 应有较大的反射系数 R_2，由于两束相干作用，输出状态为

$$|\Phi\rangle_{out} = D(\xi)U_k(L)|\alpha_1\rangle = D(\xi)|\psi_k\rangle \tag{5.83}$$

其中 $D(\xi)$为位移算符

$$D(\xi) = e^{\xi\hat{a}^+ - \xi^*\hat{a}}$$

而 $\xi = \sqrt{1-R_2^2}|\alpha_2|$是一个 C 数。输入时光子数产生与湮灭算符为 $\hat{a}^+$与 $\hat{a}$，光子数算符为 $\hat{n}$，输出模光子数的湮灭算符为 $\hat{C}$

$$\begin{aligned}\hat{C} &= U_k^+(L)D^+(\xi)\hat{a}D(\varepsilon)U(L) \\ &= e^{i\tau\hat{n}}\hat{a} + \xi\end{aligned} \tag{5.84}$$

输出模光子数算符为

$$\hat{n}_C = \hat{C}^+\hat{C} = \hat{n} + |\xi|^2 + (e^{i\tau\hat{n}}\hat{a}\xi^* + h.c) \tag{5.85}$$

右边括号内两项为干涉项，其值与 $e^{i\tau\hat{n}}\hat{a}$ 和 ξ 的位相差有关，可以适当选择 ξ 而使输出场 $\hat{C}$ 的光子数的不确定性取最小值，为方便取

$$\xi = \eta\alpha_1\exp[i(\varphi+\delta)] \tag{5.86}$$

其中，η 为$|\alpha_2\rangle$相对$|\alpha_1\rangle$的相对振幅，φ 是 Kerr 介质自相调制产生相移，而 δ 是$|\Phi_t\rangle$与$|\alpha_2\rangle$之间位相差，根据分析最佳值为

$$\delta = -\frac{\pi}{2}$$

这时输出光子数 $\hat{n}_C$ 的平均值和方差为

$$\langle\hat{n}_C\rangle = \langle\alpha_1|\hat{n}_C|\alpha_1\rangle = |\alpha_1|^2(1+\eta^2) \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{n}_C)^2\rangle &= \langle\hat{n}_C\rangle + \langle(\hat{C}^{+2}\hat{C}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 \\ &= \langle\hat{n}_C\rangle - 2|\alpha_1|^4\eta\{2e^{-\beta/2}\sin\tau \\ &\quad -\eta[1-e^{-2|\alpha|^2\sin 2\tau}\cos(\tau-\beta\sin\tau)]\}\end{aligned} \tag{5.88}$$

光子数方差与平均光子数之比取为

$$\sigma = \frac{\langle(\Delta\hat{n}_C)^2\rangle}{\langle\hat{n}_C\rangle} = 1 - \frac{2\eta(P-q\eta)}{1+\eta^2} \tag{5.89}$$

其中 $$P=2|\alpha_1|^2\mathrm{e}^{-\beta/2}\sin r$$

$$q=|\alpha_1|^2[1-\mathrm{e}^{-2|\alpha_1|^2\sin^2 2}\cos(r-\beta\sin r)]$$

参数 $\sigma=1$ 对应泊松分布，$\sigma>1$ 为超泊松分布，而 $\sigma<1$ 为亚泊松分布，振幅压缩态对应于亚泊松分布。将 σ 在固定 $|\alpha_1|^2$ 和 r 条件下对 η 求微商取极值，给出

$$\eta_0=\frac{(P^2+q^2)^{1/2}-q}{P} \tag{5.90}$$

对最小 σ 值为

$$\sigma_{min}=1-\frac{2\eta_0(P-q\eta_0)}{1+\eta_0^2} \tag{5.91}$$

在给定 η_0 下数值计算 σ_{min} 与 r 关系，发现开始时，随 r 增加缓慢减少（弱压缩区），然后随 r^{-2} 而迅速减少（强压缩区），最后正比于 r^4 而急剧增加，中间存在一个绝对的最小值，它与光子数有以下近似关系

$$\sigma_{abs}\approx\left(\frac{3}{4}\right)^{7/6}\langle\hat{n}_C\rangle^{-2/3} \tag{5.92}$$

由此给出光子数最小方差为

$$\langle(\Delta\hat{n}_C)^2\rangle_{abs}=\left(\frac{3}{4}\right)^{7/6}\langle\hat{n}_C\rangle^{1/3}<\langle\hat{n}_C\rangle^{1/3} \tag{5.93}$$

显然它低于正交压缩相干态可能得到的最小方差 $\langle\hat{n}\rangle^{2/3}$，表明它是一个新的振幅压缩态。

近期Sunder[9]建议将一个正交压缩相干态再通过一个Kerr介质，有可能得到一个高的振幅压缩态，可以使光子数方差为

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle<\langle\hat{n}\rangle^{1/5}$$

显然，这是一个很有意义的工作，它有可能为高容量低噪声通信提供一个理想的光源。

习　　题

5.1 若相干态是湮灭算符 $\hat{a}$ 的本征态，即 $\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$。证明算符 $\hat{b}_s=\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^+$ 的本征态是压缩态，其中 $\mu^2-\nu^2=1$。

5.2 试计算光场两个正交分量 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 在相干态的均方差。

5.3 试计算光场两个正交分量 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 在压缩相干态的均方差。

5.4 试计算在压缩相干态中光子数算符 $\hat{a}^+\hat{a}$ 的期望值，显示光子数随压缩率增加而增加。压缩真空态有非零的光子数。

5.5 试简单说明通过参数振荡产生压缩态的工作原理。

5.6 试说明四波混频产生压缩态的原理。

5.7 利用压缩光进行通信的优点是什么？

参考文献

〔1〕 Osamu Mirota(ed). Squeezed light. Elsevier, Amsterdam, 1992.

〔2〕 D. F. Walls, G. J. Milburm. quantum optics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

〔3〕 P. Meystre, M. Sargent. Elements of quanfum optics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

〔4〕 R. Loudom, P. L. Knight. Squeezed light. J Mod. Opt, 34, 1987, 709～759.

〔5〕 R. E. Slusher et al.. Squeezed Light generation by four-wave mixing near an atomic resonance. J. Opt., Soc., Am., B4, 1987, 1453～1464.

〔6〕 Ling-An Wu et al.. Squeezed states of light from an optical parametric oscillator. J. opt, Soc Am., B_4, 1987, 1465～1475.

〔7〕 R. Bergman, H. A. Naus. Squeezing in fibers with optical pulses. Opt., Lett., 16, 1991, 663～665.

〔8〕 M. Kitagawe, Y Yamanato. Namber-phase minimum uncertainty state with reduced number uncertainty in a kerr nonlinear interferemeter. Phys., Rev., 34, 1986, 3974～3988.

〔9〕 Kasivishwanathan Sundar. Highly amplitude-squeezed state of the radiation field. Phys., Rev., Lett., 75, 1995, 2116～2119.

第六章　光孤子传输的量子理论

光纤通信是现代通信发展的一个重要方向，它巨大的通信容量是其他通信方式望尘莫及的。目前通用的IM/DD(强度调制/直接检测）方式，由于光电转换及光纤色散，大大限制了通信容量潜力的发挥。1973年，Bell 实验室 Hazegawa 等人提出利用光纤的非线性平衡光纤的色散，以形成光孤子进行全光通信，可使通信容量比现有 IM/DD 系统增加 1～2 个量级，特别是 1989 年掺铒光纤放大器试制成功以后，使(光)孤子通信向实用化大大迈进了一步。

为了使读者更好的理解光孤子传输的量子理论，本章首先简要介绍光孤子传输的经典理论，并安排以下节次：1）光孤子通信的评述，2）光孤子传输的经典理论，3）量子非线性薛定谔方程，4）孤子传输的量子场理论，5）光孤子压缩态。

§6-1　光孤子通信的评述

1. 光孤子的基本概念

孤子现象的发现与孤子概念的提出，最早可以追朔到上世纪 40 年代，英国科学家 Scott-Russell 于 1844 年在给英国科协的报告“论波动”一文中记述了他 10 年前沿河道骑马追综一列孤立波的故事，他指出：当一条船在前进中突然停止时，在船头激起的涡旋仍然向前运动，形状和幅度不变，行走 1～2 哩后才逐步消失，这是最早关于孤立波的记载。

1895 年，Korteweg 和 deVries 导出一个非线性波动方程，即 KdV 方程，其用意之一就是希望从数学上解释 Scott-Russell 所观察到的浅水波现象。1964 年，Zabusky 和 Kruskal 在周期性边界条件下用计算机数字解 KdV 方程时，发现孤立波在互相碰撞时没有形变，他们将这种孤立波称为孤子（soliton），在一定意义上孤子是 20 世纪高速电子计算机的产物，两年后 Gardner 等人利用量子力学发展起来的反散射法，给出 KdV 方程严格解，以使孤立波的粒子性得到严格的数学证明。1973 年，Scott 给孤子一个一般性定义：**孤子是非线性波动方程的一个孤立波解，它在与其他同类孤立波相遇后，其幅度与形状不变。**。

光孤子与 KdV 方程所描述的浅水波不同的是它是光波的包络，在光纤中光孤子为包络孤子，它首先由 Hasegawa 和 Tappert 于 1973 年从理论上预言，描述包络孤子传递的微分方程是非线性薛定谔方程。利用复振幅 $q\ (x,\ t)$ 表示为

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q=0 \tag{6.1}$$

其中 x 为归一化的传播距离，t 是在以群速度运动参照系中的时间。方程第二项来自群速度色散，第三项来自非线性效应，光纤中非线性主要来自克尔(Kerr)效应，它是由强电场引起光纤中 SiO_2 电子云形变而使其折射率发生变化。

光孤子形成的物理机制：工作波长处在 1.55μm 区的光纤显示负色散，即光高频分量传播速度快，而低频分

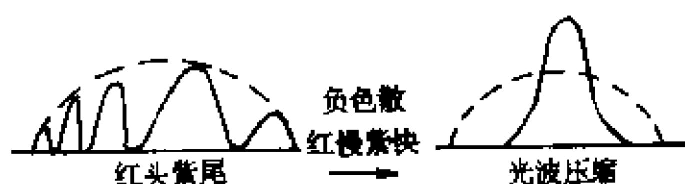


图 6.1 光波压缩

量传播速度慢，但光纤中克尔效应引起的自位相调制，造成光脉冲的前沿频率低，后沿频率高，这光脉冲进入负色散光纤后，光脉冲前沿运动慢，后沿运动快，引起脉冲压缩效应，如图 6.1 所

示。当压缩的程度与色散单独作用引起脉冲展宽平衡时，光孤子就能稳定传输。

用反散射法给出的一阶孤子解为

$$q(x,t) = \operatorname{sech}(t)\exp(-\mathrm{i}x/2) \tag{6.2}$$

它在光纤中传播时不变形，当入射光脉冲功率比较大、初始条件 $q\ (x=0,\ t)\ =N\operatorname{sech} t$、$N>1$ 时可以形成高阶孤子，周期为 $\pi/2$。在国际单位制中孤子周期和峰值功率用实际量表示为

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0.322\,\frac{\pi^2 ct^2}{\lambda^2|D|} \\ P_N &= 0.776\,\frac{\lambda^3|D|A_{\mathrm{eff}}}{\pi^2 n_2 ct^2}N^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 λ 为工作波长，D 是光纤色散，t 为孤子的脉宽，n_2 为光纤的 Kerr 系数，A_{eff}是光纤有效截面积，N 为孤子阶数。

实例：取 $\lambda=1.55\mu\mathrm{m}$，$D=1\ \mathrm{ps/km\cdot nm}$，$A_{\mathrm{eff}}=30\mu\mathrm{m}^2$，$n_2=3.2\times10^{-20}\mathrm{m}^2/\mathrm{W}$，$t=20\mathrm{ps}$，可算出

$$Z_0 = 159\mathrm{km}$$

$$P_1 = 2.3\mathrm{mW} \quad N = 1 \text{ 时}$$

2. 光孤子的产生与光孤子源

早在 1973 年 Hazegawa 等从理论上已预言光纤中可以传输光孤子，但因当时没有合适的工作在负色散区的激光器和低损耗光纤而未实现，直到 1980 年，Mollenauer 等人利用 1.55μm 的锁模色心激光器和低损耗光纤，首次观察到光纤中光孤子的传输。

理想的光孤子激光器应要求产生无啁啾双曲正割形光孤子脉冲，用孤子激光器作光孤子通信系统的光源当然是理想的。但是满足一定功率要求的超短光脉冲进入光纤后能自动演化为光孤子，因此光孤子通信系统中并不一定需要严格意义上的孤子激光器光源，利用合适的类孤子超短光脉冲源也是可以的。现已用于

光孤子通信实验系统的光孤子源有：

A. 锁模色心激光器

1989 年以前，Mollenauer 等人在光孤子传输实验系统中一直采用同步锁模色心激光器，其特点是输出功率大，容易观察到孤子现象，缺点是它是固体激光器，体积大、结构复杂、重复频率低，不适合实用的光孤子通信系统。

B. 增益开关 DFB 半导体激光器

1988 年，日本 Nakazawa 等人在孤・子传输实验中开始使用增益开关分布反馈半导体激光器作光源。增益开关 DFB 激光器是利用高重复频率电脉冲直接调制激光器的增益开关产生超短光脉冲。其特点是结构简单、重复频率可调，但产生的光脉冲有较大的红移啁啾，用作光孤子源时必须消啁啾，这可以采用 F-P 腔光滤波器，但通过滤波器后功率减少，因此入纤前需要利用光放大器进行预加重，才有可能在光纤中形成光孤子。

半导体激光器光孤子源框图如图 6.2 所示，微波信号经微波放大器放大后通过微带匹配网络馈入半导体激光器，利用微波调制时的增益开关效应产生超短光脉冲，输出光脉冲经自聚焦透镜变成平行光后，通过 F-P 滤波器消啁啾，然后经自聚焦透镜注入光纤。控制器的作用是锁定 DFB 激光器输出光的中心频率。

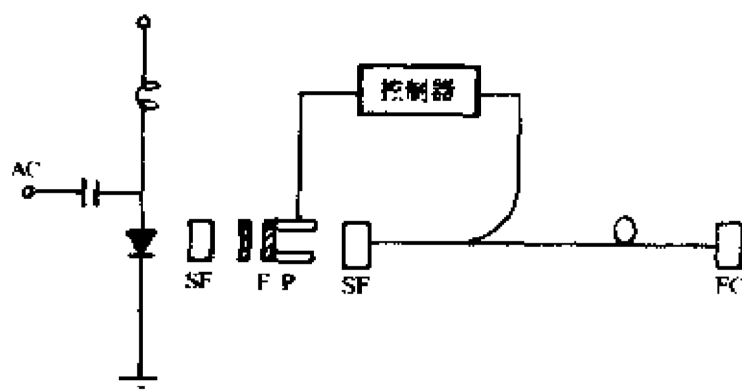


图 6.2 增益开关 DFB 激光器框图

C. 锁模半导体激光器

1990 年，Bell 实验室开始使用锁模半导体激光器，替代过去的锁模色心激光器，进行光孤子传输实验，锁模半导体激光器产生的光脉冲特性较好，但这种光孤子源稳定性较差，结构比较复杂。

D. 锁模掺铒光纤环型腔孤子激光器

锁模掺铒光纤环型腔孤子激光器，在 1992 年由 Mollenauer 等人首先在孤子实验中应用，这种激光器的优点是功率大、光脉冲波形为理想的双曲正割型、无啁啾。由于光纤参量对环境温度较敏感，为使脉冲稳定必须进行恒温保护。近几年美、日、英等国都在努力研究这种激光器。

图 6.3 给出一个 20GHz 的锁模掺铒光纤环激光器示意图。光纤环中 15m 掺 Er^{3+}光纤的杂质浓度为 970wtppm，采用 1.48μm 双泵激励，总泵浦功率为 290mW，利用 $LiNbO_3$ 调制器作为锁模型，环中偏振器为保证环内单偏振态振荡。EDF 和其他引线光纤都是保偏光纤，整个环长 30m。

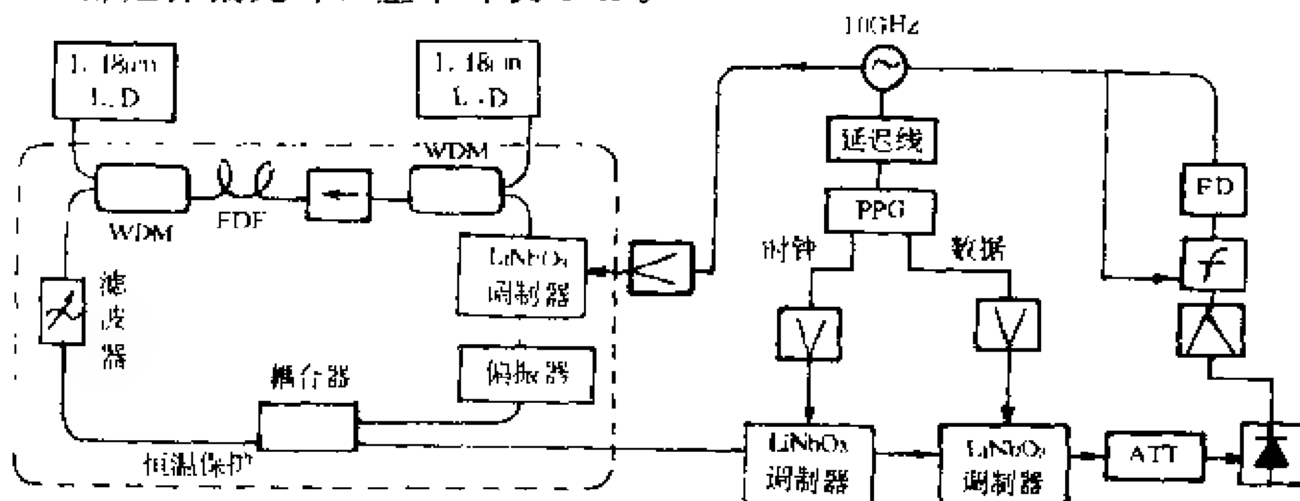


图 6.3　可调锁模掺铒光纤环激光器

为了稳定整个光纤环放在恒温器内，温度涨落小于±0.3°，调制频率为 10GHz，产生光脉冲的重复频率为 20GHz，脉宽 3.0～

3.5ps，波长可调范围是1550～1557nm。

3. 光孤子传输的稳定性

实际单模光纤并非只存在色散和非线性克尔效应的理想媒质，光纤损耗、光纤双折射，光纤参数非均匀性，高阶色散及高阶非线性效应都对光孤子的传输带来影响。另外在光通信中光孤子不是单个的而是孤子串，孤子互作用也会对孤子传输带来影响。

A. 光纤损耗影响

考虑光纤损耗后，非线性薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2q+\mathrm{i}\Gamma q=0 \tag{6.4}$$

其中Γ为归一化损耗系数，当Γ很小时，这项可以做微扰处理，最低次微扰解为

$$q(x,t)=\eta(x)\mathrm{sech}[\eta(x),t]\exp[\mathrm{i}\sigma(x)] \tag{6.5}$$

其中 $\eta(x)=\eta_0\exp(-2\Gamma x)$

$$\sigma(x)=\eta_0^2[1-\exp(-4\Gamma x)]/8\Gamma$$

可见孤子的幅度按$\exp(-2\Gamma x)$衰减，而宽度按$\exp(2\Gamma x)$展宽，孤子面积保持不变。当传输距离加大，由于孤子能量的过多损失，孤子将退化为普通脉冲，为保持孤子长距离传输，必须在中途进行能量补偿。

B. 高阶色散与高阶非线性的影响

当亚皮秒和飞秒量级的孤子在光纤中传输时，必须考虑光纤的高阶色散及高级非线性，这时孤子演化满足修正的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2q$$

$$=-\mathrm{i}\Gamma q+\mathrm{i}\frac{\beta}{6}\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}+\mathrm{i}\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}(|q|^2q)+\mathrm{i}\alpha_3 q\frac{\partial}{\partial t}|q|^2 \tag{6.6}$$

等式右边第一项为三阶色散，第二项是非线性色散，第三项反映

喇曼自频移影响。

喇曼自频移来自光在光纤中的喇曼散射，由于光纤分子振转谱的激发，使孤子能量损失，频率下降，导致孤子中心频率红移。理论计算表明孤子频率的减少与它振幅的 4 次方成正比。

C. 孤子间互作用

相距较近的两孤子在光纤中传输时将发生相互作用，作用力的大小随两孤子间初始间距的增大按指数规律衰减。两孤子同相时互相吸引，反相时互相排斥，光纤损耗将增加孤子间互作用。

一般认为只要孤子间距大于 5 倍孤子脉宽就能有效地避免孤子间互作用。

4. 光孤子放大与 Gordon-Haus 极限

在上面已提到由于光纤的损耗存在，孤子在光纤中传输时，强度逐步减少，脉冲不断展宽，最后丧失孤子特性，但只要给孤子不断地补充能量，孤子可以自行整形，利用孤子这一特性可进行全光中继通信。可采用的光放大方式有：

A. 喇曼放大

最早 Nakazawa 等建议利用一定距离注入连续泵浦光，利用光在光纤中受激喇曼(Raman)散射，将泵浦光能量逐步转变为信号光能量。1985 年，Mollenauer 首先在实验室实现喇曼放大，1988 年他利用喇曼放大成功地使孤子在 42km 光纤环中无畸变地循环传输了 6000km。

喇曼放大的缺点是增益系数低，要求泵浦功率比较高，难以在实用化系统中应用。

B. 掺铒光纤放大器

1989 年，Nakazawa 首先在孤子传输中利用掺铒光纤放大器补偿能量损失。图 6.4 给出掺铒光纤放大器的方框图。掺铒光纤放大器分为集总式和分布式两种，集总式是每隔 20～50km 加一

个放大器，这放大器具有高增益、低噪声、低插入损耗、偏振不敏感等特点，成为实用化全光孤子通信系统中最有希望的放大手段。

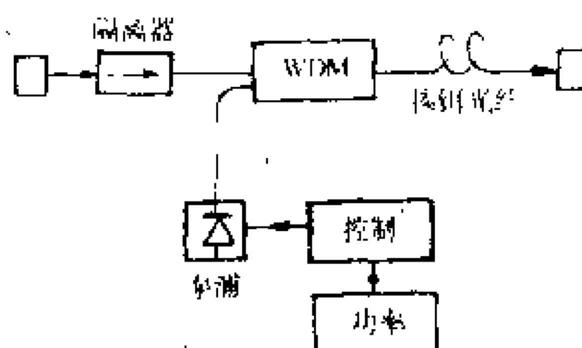


图 6.4 掺铒光纤放大器

在孤子传输稳定性方面，集总式放大不如分布式放大，分布式放大是孤子传输中利用低掺铒光纤，日本NTT 用这个方案实现了 20km 光孤子的传输，更长距离的传输则由于昂贵的掺铒光纤而难以付诸实用。

C. Gordon-Haus 极限

采用光放大器后会带来自发辐射噪声，这时由于声子和孤子的作用，引起孤子中心频率的随机抖动，由于光纤群速度色散，孤子频率的抖动又会转化为孤子到达接受端时间的抖动，这抖动限制了光孤子传输系统容量的增加，称其为 Gordon-Haus 效应．这效应于 1986 年首先从理论上提出，两年后为实验所验证。

推算的 Gordon-Haus 极限为

$$(RL)^3 \leqslant 0.1372 \frac{\tau t_0^2 R^3 A_{eff}}{h\Gamma n_2 |D|} \tag{6.7}$$

其中 R 为码速率．L 为传输距离，τ 为孤子脉宽，$2t_0$ 为接受探测器窗口，h 为普朗克常数，Γ 是单位长的功率损失，D 是光纤色散系数，n_2 为克尔系数，A_{eff}为光纤有效截面积。

例如，取 $\lambda=1.56\mu m$，$A_{eff}=25\mu m^2$，$\Gamma=0.0461km^{-1}$，$n_2=3.18\times10^{-16}cm^2/W$，$D=3$ ps/km · nm．$\tau R=0.1$，$t_0R=1/3$，得

$$RL=2.36\times10^4 \text{GHz} \cdot \text{km}$$

若取重复频率为 20GHz，则传输最长距离只有 1180km，目前常规光通信系统，通过利用波分复用技术已能达到 Gordon-Haus 极限。这意味着要显示光孤子通信的优势，必须克服 Gordon-Haus

限制。目前已有两种方法能有效地稳定孤子频率，从而抑制 Gordon-Haus 效应。

(i) 利用高速调制器对孤子同步整形，可以有效控制孤子频率。1991 年 Nakazawa 利用这一技术实现 10Gbit/s 百万公里的光孤子传输，表明已突破了 Gordon-Haus 限制. 这种方法的缺点是采用了调制器这一有源器件，将使系统复杂、造价高、可靠性差、实用上会有困难。

(ii) 在每一级掺铒光纤放大器后加一带通滤波器（称频率导引滤波器），可稳定孤子的频率，从而减小 Gordon-Haus 效应的影响。带通滤波器还可以降低相邻孤子间的互作用。这一方案简便易行，也适合波分复用系统，Mollenauer 在实验中应用这一方法取得一定效果，后来他又改进孤子控制方案，实行所谓滑频导引滤波器方法，使光纤环路中导引滤波器的中心频率沿传输距离逐渐向低频端移动，更有效滤掉噪声，消除 Gordon-Haus 效应影响。

在时域和频域上能否更好稳定孤子，是孤子通信走向实用化的关键问题之一。

5. 光孤子通信系统

自从 1973 年理论上提出光纤中可能实现光孤子传输，并于 1980 年得到实验证实后，人们就希望以光孤子作为信号载体建立光孤子通信系统。目前日、美、英、法等国做了大量工作，建立了若干光孤子传输实验系统，下面仅简单介绍一下美国 Bell 实验室和日本 NTT 的工作。

A. Bell 的 Mollenauer 的装置

Mollenauer 的实验装置是一个光纤环系统，他使用的孤子源是锁模掺铒光纤环型激光器，为消除 Gordon-Haus 效应影响，装置中采用了滑频导引滤波器，环中有三个放大器，跨度为 26km。1993 年实现了 10Gbit/s、2000km 单信道孤子传输和 20Gbit/s、

13000km 双信道波分复用孤子传输。

B. NTT 的 Nakazawa 的装置

日本 NTT 公司起步比美国 Bell 实验室晚，但进展速度快，Nakazawa 等人不仅用光纤环系统证实 10Gbit/s 传输超百万公里，而且用 40 个掺铒光纤放大器进行光孤子直通传输实验。1993 年已达到 20Gbit/s 传输 2000km、40Gbit/s 传输 1000km 和 80Gbit/s 传输 500km 的水平，实验装置如图 6.5 所示，所用孤子光源是增益开关分布反馈式半导体激光器(MQW/DFBLD)，工作波长 1.552μm，放大器之间跨度为 50km，与孤子周期相当。由于利用预加重技术，使初始幅度 $A>1$，孤子在有损光纤中传输时先压缩再展宽，使孤子回到原宽度时再放大，有利于孤子长距离传输。

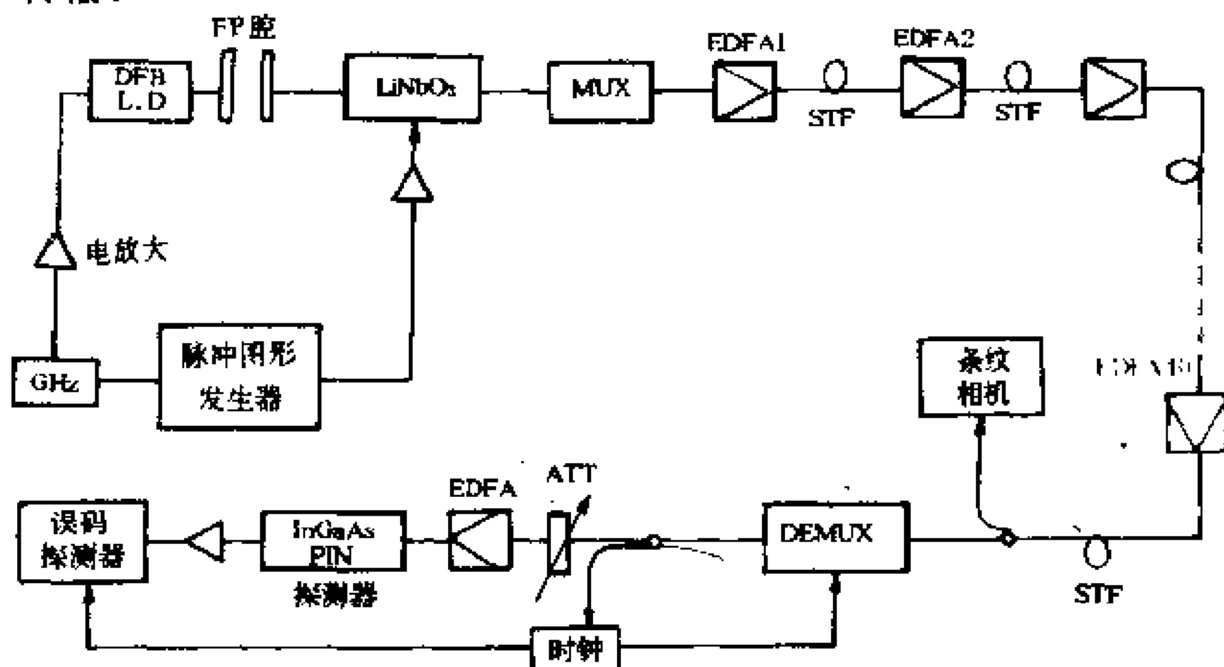


图 6.5 20Gbit/s、2000km 光孤子传输系统

C. 光孤子通信的优点

Hazegawa 曾预言孤子传输的容量可比线性系统提高 1～2 量级，它可以充分发挥光纤通信带宽的资源。利用孤子可在光纤传

输中自行整形的特点，有利于实现全光通信。

目前认为实行超长距离全光通信另一方案是在零色散波长处采用非归零（NRZ）脉冲传输，它是光孤子通信方式最大竞争对手。1992年美国Bell实验室利用274个EDFA实现了9000km，5Gbit/s的NRZ脉冲传输。日本NTT使用119个EDFA实现了6000km 5Gbit/s的NRZ脉冲传输。

但对常规NRZ通信方式，光纤非线性是严重的不利因素，会造成信号畸变，非线性度正比于传输的距离，因此距离长对NRZ通信方式不利。另外NRZ方式不适宜波分复用。

光孤子通信适宜波分复用和偏振复用，因此在超长距离、大容量传输时使用光孤子通信更为有利。如当码速超过10Gbit/s，孤子通信具有明显的优势。

§6-2　光孤子传输的经典理论

在上一节已讲过由于光纤色散效应和非线性效应的平衡可以使光波包络不形变地在光纤中传输，传输过程满足非线性薛定谔方程（6.6）式，本节先推导这一方程，然后介绍方程求解方法，并讨论光孤子在光纤中传输的某些问题。

1. 光纤中光波包络方程的推导

首先对包络方程做定性讨论，然后再从电磁场的基本方程出发推导方程。

A. 包络函数的波方程

在光通信中，信号的传播总要对光波进行调制，调制成波包，单一频率波是平面波，调制波频谱有一分布，光矢量随时间和频率分布如图6.6所示，数学表示为

$$E = \overline{E}(x,t)\exp[i(k_0x - \omega_0t)]$$

其中，k_0 和 ω_0 是载波的波数和角频率，振幅 $\overline{E}(x, t)$ 是时空 x，t 慢变化函数，电场频谱在载波频 ω_0 附近有一个分布，$\overline{E}(x, t)$表示波的包络函数。

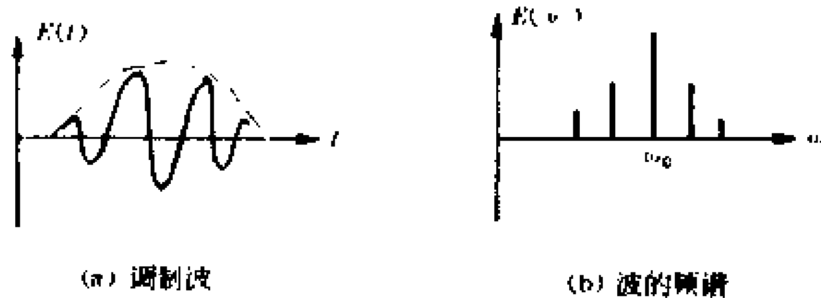


图 6.6 调制波分布

光纤中存在色散，即光速度是波频率的函数，由于 $v=\frac{c}{n}$，则光折射率、以致波数 k（$=n\omega/c$）与频率有关，将波数 k 在 ω_0 附近展开

$$k-k_0=\left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^3+\cdots \tag{6.7}$$

将缓变波的包络函数作富氏变换，得

$$\overline{E}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint_{-\infty}^{\infty}\overline{E}(\Delta k\Delta\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\omega t-\Delta kx)}\mathrm{d}(\Delta k)\mathrm{d}(\Delta\omega)$$

逆变换

$$\overline{E}(\Delta k,\Delta\omega)=\iint_{-\infty}^{\infty}\overline{E}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\omega t-\Delta kx)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$\Delta\omega=\omega-\omega_0$ 表示边带对 ω_0 的频移，$\Delta k=k-k_0$ 表示波数的位移，从上两式看出，$\partial\overline{E}/\partial t$ 与 $-\mathrm{i}\Delta\omega\overline{E}$、$\partial\overline{E}/\partial x$ 与 $\mathrm{i}\Delta k\overline{E}$ 的富氏变换等同，因此（6.7）式可以改写为

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}=\mathrm{i}k'\frac{\partial}{\partial t}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mathrm{i}\frac{k'''}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\cdots \tag{6.8}$$

将（6.8）式作用在包络函数 $\bar{E}$（x，t）上，保留二阶导数得

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar{E}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}=0 \tag{6.9}$$

其中 $k'=\left.\frac{\partial k}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}$，$k''=\left.\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0}$，调制波的群速度为

$$v_g=\partial\omega/\partial k=1/k'$$

$$k''=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)=-\frac{1}{v_g^2}\frac{\partial v_g}{\partial\omega}$$

k''反映波包群速度的色散性质，方程（6.9）式的解可以是 $x-v_gt$ 的任意函数 $\bar{E}$（$x-v_gt$），表示光的包络是以群速度传播．因此可引入一个新坐标系，它以群速度运动，令

$$\xi=\varepsilon^2x \qquad \tau=\varepsilon(t-k'x)$$

代入（6.9）式，得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial\bar{E}}{\partial\xi}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\tau^2}=0 \tag{6.10}$$

$\varepsilon=\Delta\omega/\omega_0$ 是个小量，方程（6.10）式显示波的包络函数 $\bar{E}$ 由于群速度色散而逐步形变。

在 SiO_2 的光纤中，当波长 $\lambda=1.3\mu m$ 时，$k''=0$ 为零色散；对较短波长时 k''为正，群速度是频率下降函数，为正常色散区；对长波长部分 k''为负，群速度是频率上增函数，为反常色散区。由于波长在 $1.5\mu m$ 附近光纤损失最小，是选择光波工作的最佳区域，其 k''是负的。群速度色散常用色散系数 D 表示．它与 k''关系为

$$D=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}k'' \tag{6.11}$$

λ 是真空中光波波长，c 为光速。若零色散波长为 λ_0，对 SiO_2，k'' 近似为

$$k''=-5.3\times10^{-2}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{2\pi c^2}$$

k''单位为 ps^2/km，而 D 单位为 $ps/nm \cdot km$，色散位移光纤 $\lambda_0=1.5\mu m$。

若进一步考虑光纤的非线性效应，折射率

$$n = n_0(\omega) + n_2|E|^2$$

n_2 为克尔系数，对于 SiO_2，$n_2=3.2\times10^{-20}m^2/W$。克尔效应来自 SiO_2 分子电子云分布在光电场作用下的形变，响应时间为 $10^{-15}s$，考虑非线性效应后，方程（6.10）式变成

$$i\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + g\frac{|E|^2 E}{\varepsilon^2} = 0 \qquad (6.12)$$

其中 $g=2\pi n_2\alpha/\lambda$，α 是表示由光强随光纤截面改变引入的修正因子，常取为 1/2，由于方程（6.12）式与量子力学中的薛定谔方程相似

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = 0$$

故（6.12）式称非线性薛定谔方程，在薛定谔方程中，V 表示势，捕获用波函数 ψ 表示的准粒子。方程（6.12）式中的 $|E|^2$ 正比于 V，即捕获势正比于光的强度，若 k''是负的，正比于 $|E|^2$ 势且有捕获波能的效应，称为波的自捕获，波强度由于自捕获在局部范围集中，当色散的扩展效应与非线性的自捕获效应平衡，稳定的脉冲将在光纤内传播。

下面在圆柱形波导条件下，从麦克斯韦方程组出发，推导孤子在光纤中传输的非线性薛定谔方程。

B. 非线性薛定谔方程的推导

光纤中光脉冲的传输服从麦克斯韦方程，考虑自由场，在 SI 制中方程组为

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (6.13)$$

物质方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \tag{6.14}$$

ε_0 为真空中电容率，μ_0 为真空中导磁率，$\vec{P}$ 和 $\vec{M}$ 分别表示电极化强度和磁极化强度，光纤中近似取 $\vec{M}=0$，从（6.13）式和（6.14）式可以导出

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{6.15}$$

式中利用了 $\mu_0\varepsilon_0=1/c^2$，c 为真空中光速。为求解方程必须给出 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 的关系。一般说 $\vec{P}$ 的计算应采用量子力学方法，特别当光频与介质共振频率接近时更为必须，但当远离介质的共振频率处，$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 关系可以唯象表示为

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} \vdots \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \cdots) \tag{6.16}$$

式中 $\chi^{(j)}$ 为 j 阶电极化率，考虑到光的偏振性质，χ^j 是 $j+1$ 阶张量，线性电极化率 $\chi^{(1)}$ 对 P 的贡献是主要的，$\chi^{(2)}$ 只在某些分子结构为非反演对称介质时才不为零，SiO_2 分子是对称结构，光纤中取 $\chi^{(2)}=0$，故非线性效应只考虑 $\chi^{(3)}$ 作用，电极化率写为

$$\vec{P} = \vec{P}_L(r,t) + \vec{P}_{NL}(r,t)$$

考虑到响应的时间延迟，$\vec{P}_L$ 与 $\vec{P}_{NL}$ 与场强关系的普遍形式为

$$\vec{P}_L(r,t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \cdot E(\vec{r},t')\mathrm{d}t' \tag{6.17}$$

$$\vec{P}_{NL}(r,t) = \varepsilon_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vdots \vec{E}(r,t_1) \cdot \vec{E}(r,t_2)\vec{E}(r,t_3)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3$$

在阶跃形光纤的纤芯和包层中，折射率 $n(\omega)$ 与方位无关，则 $\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$，有

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

这样方程(6.15)式可写成

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \tag{6.18}$$

为解方程(6.18)式需采用几点近似：首先把 P_{NL} 看成是 P_L 的微扰，并假定光场沿光纤长度方向偏振态不变，可用标量近似，并假定光场是准单色的，谱宽 $\Delta\omega$，有 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$，利用慢变包络近似，取

$$\vec{E}(r,t) = \frac{1}{2}\hat{x}(\overline{E}(r,t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + c.c.) \tag{6.19}$$

$\hat{x}$ 表示 x 方向单位偏振矢量，$E(r,t)$ 为时间慢变化函数，类似 $\vec{P}_L$ 与 $\vec{P}_{NL}$ 也近似表示为

$$\vec{P}_L(r,t) = \frac{1}{2}\hat{x}[\overline{P}_L(r,t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + c.c.]$$

$$\vec{P}_{NL}(r,t) = \frac{1}{2}\hat{x}[\overline{P}_{NL}(r,t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + c.c.]$$

代入(6.17)式中，得到

$$\overline{P}_L(r,t) = \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{xx}^{(1)}(t-t')\overline{E}(r,t')\exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t' \tag{6.20}$$

假定非线性项 P_{NL} 的响应是瞬时作用的，$\chi^{(3)}$ 的时间关系用三个 δ 函数给定，得

$$\vec{P}_{NL}(r,t) = \varepsilon_0\chi^{(3)} \vdots \vec{E}(r,t)\vec{E}(r,t)\vec{E}(r,t) \tag{6.21}$$

瞬时非线性响应的假定相当于忽略了 $\chi^{(3)}$ 的色散，若电磁作用时间为 10^{-15}s 左右，则对脉宽>10ps 的孤子，这假定是可行的。将(6.19)式代入(6.21)式，会出现三次谐波项，通常忽略这一项，这样给出

$$\overline{P}_{NL}(r,t) = \varepsilon_0\varepsilon_{NL}\overline{E}(r,t) \tag{6.22}$$

其中 $\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}|\overline{E}(r,t)|^2$ 为电容率的非线性部分。

为得到慢变化振幅 $\overline{E}(r,t)$ 的波方程，在频域内进行推导较为方便，其有一困难是由于 ε_{NL} 与场强有关，方程(6.18)式是非线性的，为了线性化将 ε_{NL} 看成常量，这里由于将 P_{NL} 项看成微扰，故此近似是合理的。将(6.20)～(6.22)式代入(6.18)式，得到

$$\nabla^2 \widetilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \widetilde{E} = 0 \tag{6.23}$$

式中 $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}$， $k_0 = \omega/c$。故

$$\widetilde{E}(r, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(r, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt \tag{6.24}$$

可以用折射率和吸收系数 α 表示电容率的实部和虚部

$$\varepsilon = (\bar{n} + i\alpha/2k_0)^2$$

$$\bar{n} = n(\omega) + n_2 |E|^2 \tag{6.25}$$

$$n_2 = \frac{3}{8n} \chi_{xxxx}^{(3)}$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \mathrm{Re}[\widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \qquad \alpha(\omega) = \frac{k_0}{n} \mathrm{Im}[\widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)]$$

方程(6.23)式可以用分离变量法求解，取

$$\widetilde{E}(r, \omega - \omega_0) = F(x, y) q(z, \omega - \omega_0) \exp(ik_0 z) \tag{6.26}$$

代入(6.23)式中可以得到两个方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega) k_0^2 - \bar{k}^2] F = 0 \tag{6.27}$$

$$2ik_0 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z} + (\bar{k}^2 - k_0^2) q = 0 \tag{6.28}$$

由于假定 q 是 z 的慢变化函数，推导中忽略了二阶导数 $\partial^2 q/2z^2$ 项。方程(6.27)式为光纤模式的本征方程，利用它可以确定波数 $\bar{k}$，其中电容率可近似取为

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n$$

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} \tag{6.28a}$$

方程(6.27)式可以用微扰论求解，先用 n^2 代替 ε 求出模分布函数 $F(x, y)$ 和对应波数 $k(\omega)$，对于单模光纤只存在基模 HE_{11}，$F(x, y)$ 用零阶贝塞尔函数表示，为简单采用高斯分布

$$F(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) \tag{6.29}$$

参量 R 通过实际场分布拟合高斯分布给出，Δn 加入不影响分布 F（x，y），但本征值将变化为

$$\bar{k}(\omega) = k(\omega) + \Delta k \tag{6.30}$$

$$\Delta k = \frac{k_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{6.30a}$$

方程（6.28）式改写成

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} = \mathrm{i}[k(\omega) + \Delta k - k_0]\tilde{q} \tag{6.31}$$

将 $k(\omega)-k_0$ 在 ω_0 附近展开

$$k(\omega) - k_0 = k'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\right|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^3 + \cdots$$

作富氏逆变换

$$q(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(z,\omega - \omega_0)\exp[-\mathrm{i}(\omega - \omega_0)t]\mathrm{d}\omega$$

在逆变换中 $\omega-\omega_0$ 对应微商算符 $\mathrm{i}(\partial/\partial t)$，得

$$\frac{\partial q}{\partial z} = k'\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2}k''\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \mathrm{i}\Delta k q \tag{6.32}$$

从（6.30a）式看出 Δk 中包括光纤的损耗和非线性效应，利用（6.28a）式，（6.32）式可写为

$$\frac{\partial q}{\partial z} + k'\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2}k''\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}q = \mathrm{i}\gamma|q|^2 q \tag{6.33}$$

其中 $\gamma=\frac{n_2\omega_0}{cA_{\mathrm{eff}}}$ 为非线性系数，A_{eff} 为光纤纤芯有效截面积，其值与光纤内径有关也与模分布函数 $F(x,y)$ 有关，在高斯分布时近似有 $A_{\mathrm{eff}}=\pi R^2$。经过适当变换，方程（6.33）式可以化为标准化的

(6.4) 式，这方程已可以用来讨论孤子在光纤中传播的许多问题，但还有些效应没有考虑，例如受激喇曼散射和受激布里渊散射、高阶色散及高阶非线性效应，考虑这些效应后给出的将是修正的非线性薛定谔方程 (6.6) 式。

2. 非线性薛定谔方程的孤子解

对于非线性薛定谔方程，一般情况下只有数字解，只有在非常特殊情况下才可以解析求解，所用方法为反散射法，这里我们先介绍反散射法，然后介绍数字解法。

A. 反散射法应用

散射问题是量子力学基本问题之一，一般散射问题是已知相互作用势，求散射截面和角分布，所谓反散射法是已知散射结果求散射势。理论发现有些非线性问题的解正好是某个散射问题中的势函数。

在不考虑损耗和高阶效应时，非线性薛定谔方程的标准形式为

$$i\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q=0 \tag{6.34}$$

这方程有个重要特点，若 $q(z,t)$ 是方程的一个解，则 $\varepsilon q(\varepsilon^2 z,\varepsilon t)$ 也是方程的一个解，ε 为任意常数，在反散射法中，方程(6.34)式对应的本征值方程为

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi_1}{\partial t}+q(t)\psi_2&=\lambda\psi_1 \\ -i\frac{\partial \psi_2}{\partial t}+q^*(t)\psi_1&=\lambda\psi_2 \end{aligned} \tag{6.35}$$

若 q 满足方程(6.34)式，则方程(6.35)式有稳定本征值 λ，ψ_1，ψ_2 是在势场 $q(z,t)$ 中散射波的振幅，对一已知的初始形式的 $q(0,t)$，利用方程(6.35)式得到初始的散射数据，包括反射系数 $r(\lambda)$，在 λ

复平面中的极点 λ_j 及相应留数 C_j。用反散射方法由变化的散射数据 $r(\lambda)$，λ_j 和 C_j 可重新建立势场 $q(z,t)$，一般需要解复杂的线性积分方程。然而，对初始势场 $q(0,t)$，$r(\lambda)$变为零的特殊情况，$q(z,t)$可通过解一组代数方程得到，这种情况正对应于孤子的情况，孤子的阶数和极点数目 N 或本征值 $\lambda_j(j=1\sim N)$决定，解的一般形式为

$$q(z,t)=-2\sum_{j=1}^{N}\bar{C}_j^*\psi_{2j}^* \tag{6.36}$$

其中 $\bar{C}_j=\sqrt{c_j}\exp(i\lambda_j t+i\lambda_j^2 z)$，

ψ_{2j}满足以下方程组

$$\begin{aligned}\psi_{1j}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\bar{C}_j\bar{C}_k^*}{\lambda_j-\lambda_k^*}\psi_{2k}^*&=0\\ \psi_{2j}^*-\sum_{k=1}^{N}\frac{\bar{C}_j^*C_K}{\lambda_j^*-\lambda_k}\psi_{1k}&=C_j^*\end{aligned} \tag{6.37}$$

本征值 λ_j 一般为复数($\lambda_j=\mathrm{Re}\lambda_j+i\mathrm{Im}\lambda_j$)，实部 $\mathrm{Re}\lambda_j$ 使孤子速度偏离群速度 v_g. 为了使 N 阶孤子保持束缚态，必须使所有分量的群速度相同，为此要求 $\mathrm{Re}\lambda_j=0$，则 $\lambda_j=i\mathrm{Im}\lambda_j=i\eta_j$，故 $\bar{C}_j$ 有

$$\bar{C}_j=\sqrt{C_j}\exp\ (-\eta_j t-i\eta_j^2 z)$$

则 N 阶孤子由 η_j 和留数 C_j 决定，如果孤子当 $t=0$ 时对称，则留数与本征值 η 关系为

$$C_j=\frac{\prod_{k=1}^{N}(\eta_j+\eta_k)}{\prod_{k\neq j}|\eta_j+\eta_k|}$$

基态孤子只有一个极点，对应本征值 η_1，从（6.36）式给出一阶孤子解

$$q(z,t)=2\eta_1\mathrm{sech}(2\eta_1,t)\exp(2i\eta_1^2 z) \tag{6.38}$$

本征值 η_1 决定孤子的振幅，取 $q(0,0)=1$，得 $2\eta_1=1$，则给出基

态孤子解的典型形式为

$$q(z,t)=\mathrm{sech}(t)\exp(\mathrm{i}z/2) \tag{6.39}$$

(6.39) 式表明，如果光纤无损耗，基态孤子在光纤中传输时其形状不发生变化，正因为这一点，基态孤子在光通信中具有特别重要作用。

高阶孤子也由一般解 (6.36) 式描述，本征值 η_j 和留数 C_j 的不同组合，导致高阶孤子形状复杂变化，二阶孤子选取 $\eta_1=\frac{1}{2}$，和 $\eta_2=\frac{3}{2}$，从 (6.36) 式可得

$$q(z,t)=\frac{4[\cosh(3t)+3\exp(4\mathrm{i}z)\cosh(t)]\exp(\mathrm{i}z/2)}{[\cosh(4t)+4\cosh(2t)+3\cos(4z)]} \tag{6.40}$$

此解的一个重要性质为 $|q(z,t)|^2$ 是以 $z_0=\pi/2$ 为周期的周期性函数。其实所有高阶孤子具有同样的周期，在国际单位制中 Z_0 由 (6.3)式给出。(6.3)式中 P_N 是产生 N 阶孤子所需峰值功率。解 (6.40)式是在取初始条件为

$$q(0,t)=N\mathrm{sech}(t) \qquad N=2$$

得到的，当初始脉冲不为双曲正割形，且 N 不为整数时，没法用反散射法求解，而只有数值方法解。

B. 非线性薛定谔方程的数值解

1964 年 Zabusky 和 Kruskal 利用数值方法解 KdV 方程，发现两孤立波相碰时形状不变，从而引入孤子的概念，开辟了孤子研究的一个新时代。

目前用来解非线性薛定谔方法的数值解分三类：(1) 差分法，(2) 有限元法，(3) 谱方法和拟谱方法。在这三类方法中第三类方法精度较高，运算速度较快，用得较广泛，在其中用得最多的是分步富里叶变换法，这方法由于采用了快速富里叶变换算法，使运算速度比前两种方法快一、二个数量级。方法的基本思想是将

脉冲在光纤中传播视为一步步进行的，在每一步中光纤的群速度色散和非线性项分别独立地作用于光脉冲。例如解带损耗的孤子在光纤中的传输方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q+\mathrm{i}\Gamma q=0$$

将方程写为

$$\frac{\partial q}{\partial z}=(\hat{D}+\hat{N})q \tag{6.41}$$

其中

$$\hat{D}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Gamma \qquad \hat{N}=\mathrm{i}|q|^2 \tag{6.42}$$

式中 $\hat{D}$ 是代表光纤色散和损耗的微商算符，$\hat{N}$ 为非线性算符，它代表光纤非线性对脉冲的作用，脉冲在光纤中由 Z 传输到 $z+\Delta z$ 可分两步计算，先假定只是光纤的非线性作用于脉冲而令 $\hat{D}=0$，再假定色散项单独起作用而令 $\hat{N}=0$，从而有

$$q(Z+\Delta z,T)=\exp(\Delta z,\hat{D})\exp(\Delta z,\hat{N})q(z,T) \tag{6.43}$$

代表非线性的指数算符运算直接在时域中进行，代表色散和损耗的指数算符运算在频域中进行，可以令

$$P(z,T)=\exp(\Delta z,\hat{N})q(z,T)$$

$$q(Z+\Delta z,T)=\exp(\Delta z,\hat{D})P(z,T)$$

$$=\{F^{-1}\exp[\Delta z,\hat{D}(\mathrm{i}\omega)]F\}P(z,T) \tag{6.44}$$

式中 F 和 F^{-1}分别代表富里叶变换和逆富里叶变换，$\hat{D}(\mathrm{i}\omega)$是用 $\mathrm{i}\omega$ 代替(6.42)式中的微商算符

$$\hat{D}(\mathrm{i}\omega)=-(\mathrm{i}\omega^2/2)-\Gamma$$

在频域中 $\hat{D}(\mathrm{i}\omega)$为一常数，这样利用(6.44)式进行数值计算相对较快，正因如此，分步富里叶方法较差分法要快得多。考虑高阶效应以后，方程变成(6.6)式，这时非线性算符与色散耗散算符写为

$$\hat{N} = \mathrm{i}|q|^2 + \frac{\partial_2}{q}\frac{\partial}{\partial t}(|q|^2 q) + \frac{\partial}{\partial t}|q|^2$$

$$\hat{D} = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta}{6}\frac{\partial q^3}{\partial t^3} - \Gamma$$

为估计分步富里叶变换法的精度，可以这样来讨论：方程（6.41）式可以表示为

$$q(z + \Delta z, T) = \exp[\Delta z(\hat{D} + \hat{N})]q(z, T) \tag{6.45}$$

利用非对易算符的 Glauber 公式，得

$$\exp(\hat{D})\exp(\hat{N})\exp\left[-\frac{1}{2}[\hat{D}, \hat{N}]\right] = \exp[\hat{D} + \hat{N}] \tag{6.46}$$

比较（6.45）式与（6.43）式，看出分步富里叶变换法主要误差是对易子项$\frac{1}{2}\Delta z^2$ $[\hat{D}, \hat{N}]$，决定分步步长 Δz 的二次项，为保证精度，在计算中要精心选择 z 和 t 的步长。

3. 光纤中包络孤子传输的某些问题

下面讨论在光纤中形成和传播孤子时遇到的实际问题。

A. 光纤损失效应

光在光纤中传播时由于介质吸收和散射，能量会不断减少，光波的振幅在传播中也就减小，当损失太大时以致于不能形成孤子。考虑损失后（6.12）式写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + g\frac{|E|^2 E}{\varepsilon^2} = -\frac{\mathrm{i}\gamma E}{\varepsilon^2} \tag{6.47}$$

其中 γ 是单位长度的损失。若以标准化形式表示，则为

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + |q|^2 q = -\mathrm{i}\Gamma q \tag{6.48}$$

式中 $\Gamma = \gamma\lambda/\varepsilon^2$。要形成孤子条件是非线性项的作用大于损耗，即 $(\pi n_2|E|^2/\lambda) > \gamma$，这样如取电场值为 10^6V/m，$\lambda = 1.5\mu$m，非线性项系数为 2×10^{-4}/m，即要求损失率 γ 小于 2×10^{-4}/m。如以 dB/km 表示功率损失，临介损失率为 1.7dB/km，这一要求在 1973 年

时是达不到的，但现今对波长 1.5μm 的商用光纤，已可使其损失率仅为 0.2dB/km。

若光纤损失足够小，人们利用微扰技术可得到单孤子解为

$$q(z,t) = \eta(z)\mathrm{sech}[\eta(z),t]\exp[\mathrm{i}\sigma(z)] \qquad (6.49)$$

其中 $\eta(z) = q_0\exp(-2\Gamma z)$

$$\sigma(z) = \frac{q}{8\Gamma}[1-\exp(-4\Gamma z)]$$

显示孤子振幅按指数减少 $\exp(-2z\Gamma)$，而宽度指数增加 $\exp(2z\Gamma)$，孤子能量$\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\mathrm{sech}^2\eta t\mathrm{d}t = \eta$ 也按 $\mathrm{e}^{-2z\Gamma}$ 减少。现光纤损失能量可以利用受激喇曼散射和掺铒光纤放大器补偿，以使孤子能量在传输中不变。

B. 高阶项的影响

当孤子脉冲比较窄，非线性薛定谔方程应加入高阶项的影响，此时方程为

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \Gamma q\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + |q|^2 q + h = 0 \qquad (6.50)$$

其中

$$h = \mathrm{i}\varepsilon\left[\beta_1\frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + \beta_2\frac{\partial}{\partial t}(|q|^2 q) + \mathrm{i}\sigma_3 q|q|^2)\right]$$

h 中第一项表示高阶色散效应，其中系数

$$\beta_1 = \frac{1}{6}\frac{k'''\lambda}{\tau_0} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \tau_0 - (-\lambda k'')^{1/2}$$

h 中第二项表示非线性色散效应，它来自波长对 Kerr 系数 n_2 的依赖性。第三项表示喇曼散射对孤子传输的影响，它一方面引起孤子谱的红移，另外还可能引起孤子的裂变。

C. 峰功率与脉冲宽度关系

光纤输入脉冲峰功率 P_0 和峰值电场 E_0 及光纤有效截面 A_{eff} 的关系为

$$P_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} v_g n_0^2 E_0^2 A_{eff} \tag{6.51}$$

其中 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$F/m，$n_0$ 为光纤折射率，v_g 为群速度。如果脉冲有 sech 形，其宽度 τ_0 和峰值电场强度 E_0 的关系为

$$(\pi n_2)^{1/2} E_0 \tau_0 = 1.76(-\lambda k'')^{1/2} \tag{6.52}$$

若 k''用色散系数 D 表示为

$$(-\lambda k'')^{1/2} = 2.3 \times 10^{-3} [\lambda(\mu m)]^{3/2} \left(|D| \left(\frac{ps}{nm \cdot km} \right) \right)^{1/2} (ps) \tag{6.53}$$

从上面三式可以给出脉冲宽度 τ_0 (ps) 和需要的峰功率 P_0 (ω) 关系为

$$\tau_0 \sqrt{P_0} = 9.3 \times 10^{-2} \lambda^{3/2} \sqrt{|D| A_{eff}} \tag{6.54}$$

其中 λ 单位用 μm，D 单位为 ps/nm · km，A_{eff}单位为 μm²。例如取 $\lambda = 1.5\mu m$，$D = 1ps/nm \cdot km$，$A_{eff} = 20\mu m^2$，得 $\tau_0 \sqrt{P_0} = 0.76$，若 $\tau_0 = 10ps$，则 $P_0 = 5.8mW$。

形成孤子要求的最小输入功率受到光纤损失限制。方程 (6.47) 式中 γ 用光纤实际损失率 δ(dB/km)表示为

$$\gamma\ (m^{-1}) = 1.2 \times 10^{-4} \delta\ (dB/km)$$

如前所述形成孤子条件是非线性项大于损耗项，用 P_0 与 σ 表示为

$$\frac{P_0(W)}{A_{eff}(\mu m^2)} > 1.9 \times 10^{-3} \delta (dB/km) \tag{6.55}$$

若取损失率为 0.2dB/km，$A_{eff} = 20\mu m^2$，则形成孤子的最小功率为 $P_0 = 7.6mW$。

§6-3 量子非线性薛定谔方程

与光孤子在光纤中传输的经典理论发展和完善的同时，孤子

传输的量子理论也得到较大发展，许多工作的出发点是量子非线性薛定谔方程(QNSE)，它是经典非线性薛定谔方程的量子改型。本节先引出 QNSE，然后利用 Hartree 近似解方程，最后讨论某些应用。

1. 非线性薛定谔方程的量子化

考虑一中心频率为 ω 的准单色脉冲，在一个单模保偏光纤中传播，利用旁轴慢变化包络近似，令电场 $\vec{E}$ 表示为

$$\vec{E}(r,t) = \hat{x}\{E(r)A(z,t)\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]\} + c.c. \tag{6.56}$$

式中 $\hat{x}$ 为偏振单位矢量，r，z 表示模与纵坐标，$A(z,t)$是慢变化的电场包络，将(6.56)式代入波动方程，通过分离变量可以给出 $E(r)$和 $A(z,t)$满足的微分方程为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(r,\omega)\right]E(r) = k^2(\omega)E(r) \tag{6.57}$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} + k'\frac{\partial}{\partial t}\right)A = \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t} - \left(\frac{\omega}{c}\right)\Gamma n_2|A|^2 A \tag{6.58}$$

式中 $n(r,\omega)$是光纤的线性折射率，$k(\omega)$为波数，它与有效电容率 $\epsilon(\omega)$关系为

$$k^2(\omega) - \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{\epsilon_0 c^2}$$

$k' = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g}$，$k'' = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$，$n_2$ 是光纤的非线性克尔系数，Γ 是一个几何因子

$$\Gamma = \frac{\int_0^\infty 2\pi r\mathrm{d}r|E(r)|^4}{\int_0^\infty 2\pi r\mathrm{d}r|E(r)|^2}$$

这里假定 $E(0)=1$，则 $A(z,t)$是在光纤中峰值电场，从上节讨论可知，在(6.58)式中，右边第一项代表群速度色散，最后一项代表非线性作用。若取正非线性 $n_2>0$，反常色散 $k''<0$，方程(6.58)式

给出亮的时间孤子解，方程(6.58)式中没有考虑光纤的损失。下面进行标准化处理，引入无量纲变数

$$t' = z/L = |k''|z/2\tau^2, \qquad x = (z - v_g t)/v_g \tau$$
$$A = \left(\frac{\hbar\, v_g k}{2\varepsilon(\omega)V}\right)^{1/2}\Phi = A_p \Phi \tag{6.59}$$

其中 $\tau=\frac{1}{1.76}\tau_P$，$\tau_P$ 为脉冲半高度宽度，V 为脉冲有效体积

$$V = v_g \tau \int_0^\infty 2\pi r \mathrm{d}r |u(r)|^2$$

L 是特征长度，它是脉冲由色散 τ_P 增加一倍的长度，A_P 定义为每个光子的电场。

利用（6.59）式、（6.58）式可写成

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2C\Phi^* \Phi\Phi \tag{6.60}$$

为简单起见，这里用 t 代替了 t'，其中

$$2C = \left(\frac{\omega}{c}\right)\Gamma n_2 \cdot A_P^2 L \tag{6.61}$$

它是在特征长度 L 中引起的光子非线性相移，在传播方程（6.60）式中，变数 $t=z/L$ 起纵向坐标作用，而 x 描述脉冲的时间包络。

不难看出经典的非线性薛定谔方程（6.60）式对应于经典力学中的拉格朗日方程，相应系统的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \hbar\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - C\Phi^*\Phi^*\Phi\Phi\right) \tag{6.62}$$

相应系统的哈密顿量为

$$\mathscr{H} = \hbar\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - C\Phi^*\Phi^*\Phi\Phi\right) \tag{6.63}$$

对于非线性薛定谔方程量子化，可直接将其中包络函数 $\Phi(x,t)$变成算符$\hat{\Phi}(x,t)$，$\Phi^*(x,t)\to\hat{\Phi}^+(x,t)$，量子化后非线性薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}(t,x)=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\Phi}(t,x)-2C\,\hat{\Phi}^{+}(t,x)\,\hat{\Phi}(t,x)\,\hat{\Phi}(t,x) \tag{6.64}$$

场算符满足对易关系

$$[\hat{\Phi}(t,x'),\hat{\Phi}^{+}(t,x)]=\delta(x-x')$$

$$[\hat{\Phi}(t,x'),\hat{\Phi}(t,x)]=[\hat{\Phi}^{+}(t,x'),\hat{\Phi}^{+}(t,x)]=0$$

相应的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\hbar\int\mathrm{d}x\left(\frac{\partial\hat{\Phi}^{+}}{\partial x}\,\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x}-C\,\hat{\Phi}^{+}\hat{\Phi}^{+}\hat{\Phi}\hat{\Phi}\right) \tag{6.65}$$

而方程（6.64）式正好是算符$\hat{\Phi}$（t，x）的海森堡方程

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Phi}(t,x)=[\hat{\Phi}(t,x),\hat{H}] \tag{6.66}$$

上面是问题在海森堡绘景中的表示，但也可以用薛定谔绘景来描述，系统状态为$|\psi\rangle$，它的变化满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=\hat{\mathscr{H}}_S|\psi\rangle \tag{6.67}$$

其中

$$\hat{\mathscr{H}}_S=\hbar\Big(\int\frac{\partial\hat{\Phi}^{+}(x)}{\partial x}\,\frac{\partial\hat{\Phi}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x \\ -C\int\hat{\Phi}^{+}(x)\,\hat{\Phi}^{+}(x)\,\hat{\Phi}(x)\,\hat{\Phi}(x)\mathrm{d}x\Big) \tag{6.67a}$$

$\hat{\Phi}(x)$是在薛定谔绘景中场算符，不显含时间t，它满足对易关系

$$[\hat{\Phi}(x),\hat{\Phi}^{+}(x')]=\delta(x-x')$$

$$[\hat{\Phi}(x),\hat{\Phi}(x')]=[\hat{\Phi}^{+}(x),\hat{\Phi}^{+}(x')]=0$$

方程已有多种方法求解，在薛定谔绘景中，已有人用 Bethe 假设方法求解，在海森堡绘景中用量子反散射法求解，为使解的物理意义更清楚，这里介绍与时间有关的 Hartree 近似法求解。

2. 与时间有关的 Hartree 近似

一般情况下，态矢量可以在光子数空间作展开为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n |\psi_n(t)\rangle \tag{6.68}$$

其中光子数态$|\psi_n(t)\rangle$可表示为

$$|\psi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n f_n(x_1\cdots x_n t)\,\hat{\Phi}^{+}(x_1)\cdots\hat{\Phi}^{+}(x_n)|0\rangle \tag{6.68a}$$

$|0\rangle$ 为真空态，f_n 为权重函数，因光子为波色子，f_n 必须是 x_j 的对称函数，a_n 与 f_n 满足以下的归一化条件

$$\begin{aligned}&\sum_n |a_n|^2 = 1\\&\int |f_n(x_1\cdots x_n t)|^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = 1\end{aligned} \tag{6.69}$$

将（6.68）式代入薛定谔方程得到 f_n 满足的方程为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_n(x_1,\cdots,x_n,t)\\&=\left[-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}} - 2C\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j)\right]f_n(x_1,\cdots,x_n,t)\end{aligned} \tag{6.70}$$

这正好是一维波色子系统带有 δ 函数相互作用的薛定谔方程。若取

$$f_n(x_1,\cdots,x_n,t) = f_n(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t}$$

可得到定态的薛定谔方程为

$$\begin{aligned}&\left[\quad\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}} - 2C\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j)\right]f_n(x_1,\cdots,x_n)\\&= E_n f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{6.71}$$

下面用与时间有关的 Hartree 近似去近似求解方程（6.70）式。这种近似适应于粒子数很大的系统，即要求在每个包络中有足够的光子数。Hartree 近似的基本点是假定每一个粒子都遇到由其他粒子作用引起的同样位势。因此，可以用单粒子波函数去描述粒子系统。Hartree 近似波函数假定为

$$f_n^{(H)}(x_1,\cdots,x_n,t) = \prod_{j=1}^{n}\Phi_n(x_j,t) \tag{6.72}$$

$\Phi_n(x_j,t)$满足归一化条件

$$\int|\Phi_n(x,t)|^2\mathrm{d}x = 1 \tag{6.73}$$

Φ_n 满足的方程利用变分法得到，它要求以下变分函数 I 取极值得到

$$I = \int f_n^{*(H)}(x_1,\cdots,x_n,t)\Big[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2C\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j)\Big]$$

$$\cdot f_n^{(H)}(x_1,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$$

$$= n\int\Phi_n^*\Big[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_n + 2(n-1)C\Phi_n^*\Phi_n\Phi_n\Big]\mathrm{d}x \tag{6.74}$$

不难看出要变分函数 I 取极小值，就要求 Φ_n 满足以下的方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_n}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2} - 2C(n-1)|\Phi_n|^2\Phi_n \tag{6.75}$$

这方程与经典非线性薛定谔方程不同之处是用 C $(n-1)$ 代替 C。

利用（6.68）式和（6.72）式看出在 Hartree 近似下，态矢量写为

$$|\Psi(t)\rangle_H = \sum_n a_n\,|\Psi_n(t)\rangle_H$$

其中

$$|\Psi_n(t)\rangle_H = \frac{1}{\sqrt{n!}}\Big(\int\mathrm{d}x\Phi_n(x,t)\,\hat{\varphi}^+(x)\Big)^n|0\rangle \tag{6.76}$$

上式表明，在 Hartree 近似中，n 粒子态中所有 n 个粒子具有相同的场包络 $\Phi_n(x,t)$，n 个粒子态(6.76)式是自由 n 光子态 $|\psi_n\rangle$ 的推广

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n\,|0\rangle$$

$\hat{a}^+$ 为光子产生算符。比较看出，方程(6.76)式中 $\int\mathrm{d}x\Phi_n(x,t)$

· $\Phi^{+}(x)$ 是带有电场包络 $\Phi_n(x,t)$的光子产生算符。

最后值得指出的是，以上量子化是经典包络场 A（或 Φ）的量子化。这里假定光是准单色和旁轴近似，其中引入产生算符 $\Phi^{+}(x)$，它是定域产生算符，即在 x 处产生光子，在一般量子电动力学中，认为光子是不定域的，它没有位置算符，然而，近期 Deutsch 和 Garrison[12]从严格的量子电动力学理论出发，证明只要这区域的线度大于光波的波长，光子可以定域在一定的区域内。因此只要脉冲的包络其线度大于波长，其中光子可定域处理，这一限制说明这方法不适宜非常窄的脉冲。只要脉冲宽度 $\tau>50\text{fs}$，即可以作定域处理。

3. 崩坍与再生效应

下面用孤子包络的半经典方程（6.75）式处理光孤子在光纤中传输时，将会显示崩坍与再生效应。考虑到输入光脉冲是相干光，光子数统计分布为 Paisson 分布

$$P_n=|a_n|^2=\frac{\langle n\rangle^n}{n!}\exp(-\langle n\rangle) \tag{6.77}$$

其中 $\langle n\rangle$ 为平均光子数 $\langle n\rangle=\sum\limits_{n=0}^{\infty}np_n$，在这状态下光子数的方差为 $\sigma=\sqrt{\langle n\rangle}$。

下面将传输方程（6.75）式改写另一形式

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}-\eta\left(\frac{n-1}{\langle n\rangle-1}\right)|\Phi_n|^2\Phi_n \tag{6.78}$$

其中

$$\eta=\left(\frac{\omega}{c}\right)\Gamma n_2A_P^2(\langle n\rangle-1)L \tag{6.78a}$$

是 $\langle n\rangle$ 光子通过特征长度 L 产生的非线性相移。对特殊情况 $n=\langle n\rangle$，$\eta-4$，从上节讨论知道，方程（6.78）式有以下孤子解

$$\Phi(x,t)=\Phi_n(x,t)=\Phi_0(x)\exp(\mathrm{i}t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}(x)\exp(it) \tag{6.79}$$

它在 x 方向为双曲正割形，周期为 $t_0=\pi/4$。这解满足 Φ_n 归一化条件要求，下面讨论中取 $\eta=4$，并假定对不同 n，初始电场包络是一样的均为 $\Phi_0(x)$，即

$$\Phi_n(x,0)=\Phi_0(x) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

在 Hartree 近似中，电场包络的量子平均值为

$$\langle\Phi(x,t)\rangle={}_H\langle\psi(t)\,|\,\hat{\Phi}(x)\,|\psi(t)\rangle_H$$

$$=\sum_n\sum_m a_n a_{mH}^*\langle\psi_m(t)\,|\,\Phi(x)\,|\psi_n(t)\rangle_H \tag{6.80}$$

由于

$$|\Psi(t)\rangle_H=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\int dx\Phi_n(x,t)\,\hat{\Phi}^+(x)\right)^n|0\rangle$$

则有

$$\hat{\Phi}(x)\,|\Psi_n(t)\rangle_H=\frac{n}{\sqrt{n!}}\Phi_n(x,t)\left(\int dx\Phi_n(x,t)\,\hat{\Phi}^+(x)\right)^{n-1}|0\rangle \tag{6.81}$$

利用（6.80）式、（6.81）式和（6.77）式，得

$$\langle\Phi(x,t)\rangle=\sqrt{\langle n\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}P_n\Phi_{n+1}(x,t) \tag{6.82a}$$

相类似给出

$$\langle\Phi^+(x,t)\rangle=\sqrt{n}\sum_{n=1}^{\infty}P_n\Phi_{n+1}^*(x,t) \tag{6.82b}$$

引入正交相算符定义为

$$\hat{X}_1(x)=\hat{\Phi}(x)+\hat{\Phi}^+(x)$$

$$\hat{X}_2(x)=[\hat{\Phi}(x)-\hat{\Phi}^+(x)]/\mathrm{i} \tag{6.83}$$

利用（6.82）式得到正交相振幅的量子平均为

$$\langle X_1(x,t)\rangle = 2\sqrt{\langle n\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}P_n\mathrm{Re}[\Phi_{n+1}(x,t)]$$
$$\langle X_2(x,t)\rangle = 2\sqrt{\langle n\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}P_n\mathrm{Im}[\Phi_{n+1}(x,t)] \tag{6.84}$$

其中 P_n 由(6.77)式给出，$\langle X_1(x,t)\rangle$或$\langle X_2(x,t)\rangle$可以通过数值解方程(6.78)式给出，利用束传播的方法，在(6.84)式中求和 n 值是从$\langle n\rangle-4\sigma$ 到$\langle n\rangle+4\sigma$。

图 6.7 给出$\langle X_1\rangle$计算的结果，其中取 $x=0,\eta=4,\langle n\rangle=100$。在(6.79)式的孤子解中，$X_1$ 随 t 变化应为 $\cos(t)$，它的周期为 2π，但在图 6.7 中出现崩坍与再生现象，这是一种典型的量子效应。

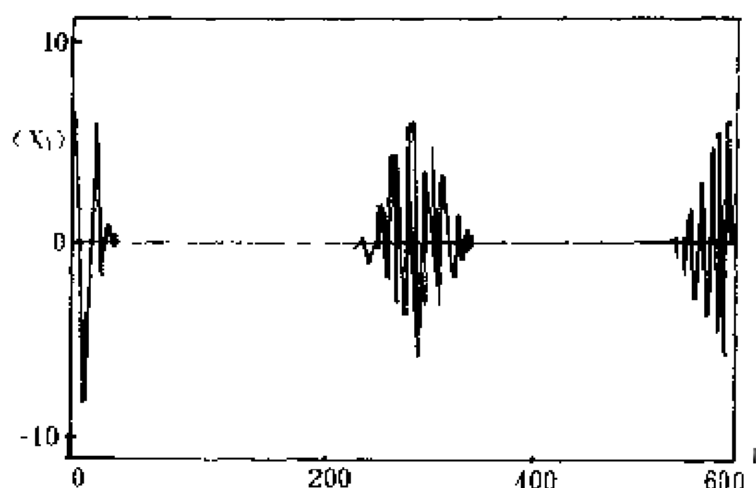


图 6.7 正交相振幅$\langle X_1\rangle$与纵坐标 t 的变化关系，其中$\langle n\rangle=100,\eta=4$

§6-4 光孤子传输的量子场理论

在上节讨论中是将孤子包络 Φ 本身进行量子化，量子化后的算符φ和φ^+应是孤子包络的产生和湮灭算符，因此，量子非线性薛定谔方程只能看作孤子量子化的一个宏观模型。更基本的量子化

方法应是将电磁场量子化，形成光子场，在光子场中包络孤子是一个大量光子混合态，它将用密度矩阵来描述。

本节将用密度矩阵来表示光纤中的量子包络孤子，从它所满足的量子光学的主方程出发推出 P 表示所满足的福克-普朗克方程，通过引入定域光子产生算符的方法，给出量子孤子包络传输满足的动力学方程——一个准经典的非线性薛定谔方程，然后介绍方程的应用。

1. 量子孤子的主方程

为了处理包络孤子在光纤中的传播，涉及到光子场与光纤中分子原子的相互作用，要求严格地同时给出量子化的光子场。光纤中分子原子状态以及光子场和介质相互作用的哈密顿量是很困难的，只有用近似方法，有一种近似方法是对介质分子状态给出适当模型哈密顿量，对光子场用偶极近似，建立相互作用模型，我们用这一近似处理了光纤中的受激喇曼散射。这里采用另一种近似方法，即不考虑光纤中介质分子的具体结构与状态变化，而将介质对光场作用用介电常数(电容率)来描述。

近似将光纤看成一个各向同性的非线性介质，它的电极化强度矢量可表示为

$$\vec{P} = \epsilon_0(\chi^{(1)}\vec{E} + \chi^{(3)}|E|^2\vec{E} + \cdots)$$

这时电磁场系统的哈密顿量近似为

$$\mathscr{H} = \int_V \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)\mathrm{d}V + \frac{\epsilon_0\chi^{(3)}}{4}\int_V E^4\mathrm{d}V$$

量子化后经过重整化，去掉零点能，再利用转动波近似，系统的哈密顿算符近似为

$$\hat{\mathscr{H}} \approx \sum_j \hbar\omega_j\hat{a}_j^+\hat{a}_j + \hbar\chi_a\sum_j \hat{a}_j^{+2}\hat{a}_j^2 \qquad (6.85)$$

其中 χ_a 为有效非线性系数

$$\chi_e = \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega_j^2 \chi^{(3)} n}{16\varepsilon^2} \tag{6.86}$$

其中n为量子化体积中的光子数。为简单起见仅考虑线性项色散，因非线性项本身是一个微扰，其中色散效应被忽略，取

$$\begin{aligned} \omega_j &= \omega(k_0 + j\Delta k) \\ &= \omega(k_0) + j\Delta k\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0} + \frac{(j\Delta k)^2}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_{k_0} + \cdots \end{aligned}$$

则

$$\sum_j \hbar\omega_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j = \hbar\omega_0 \sum_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j - \hbar \sum_j \omega'_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \tag{6.87}$$

其中

$$\omega'_j = (j\Delta k)\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0} + \frac{1}{2}(j\Delta k)^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_{k_0}$$

最后系统的哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_I \tag{6.88}$$

式中

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \hbar\omega_0 \sum_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \tag{6.88a}$$

$$\hat{\mathscr{H}}_I = \hbar\left(\sum_j \omega'_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + \chi_e \sum_j \hat{a}_j^{+2} \hat{a}_j^2\right) \tag{6.88b}$$

在$\hat{\mathscr{H}}_I$中第一项来自介质的色散，第二项为非线性项，两项联合作用使孤子能长距离在光纤中传输。

在光纤中包络孤子是多光子的混合态，可用密度算符来描述

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |n_1 n_2 \cdots n_j \cdots\rangle\langle n_1 n_2 \cdots n_j \cdots| \tag{6.89}$$

在自由空间中，光子态为$|n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}}(\hat{a}_j^+)^{n_j}|0\rangle$，其中$\hat{a}_j^+$为$j$态光子的产生算符，这时光子没有确定的位置。在光纤中包络孤子中的光子，它的位置受到限制，光子产生算符应有所变化，可以取

$$\hat{\Phi}_j^+ = \int \mathrm{d}x \Phi(x,t)\, \hat{\Phi}_j^+(x) \tag{6.90}$$

其中 $\Phi(x,t)$反映包络对光子空间位置的限制,$\hat{\Phi}_j^+(x)$为定域孤子产生算符,这定域不能理解为一个点,而应是线度大于波长的小区域。包络孤子的光子态为

$$|n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}} \Phi_j^{+n_j}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}}\left(\int \mathrm{d}x \Phi(x,t)\, \hat{\Phi}_j^+(x)\right)^{n_j}|0\rangle$$

$$|n_1 n_2 \cdots n_j \cdots\rangle = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n_j!}}\left(\int \mathrm{d}x \Phi(x,t)\, \hat{\Phi}_j^+(x)\right)^{n_j}|0\rangle \tag{6.91}$$

在量子统计中，密度算符的演变，满足量子刘维方程

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H} = [\hat{H}, \rho] \tag{6.92}$$

这在量子光学中称为主方程。主方程写在相互作用绘景中为

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = \hat{H}_I \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{H}_I \tag{6.93}$$

$\hat{\rho}_I$ 为相互作用绘景中的密度矩阵，$\hat{H}_I$ 为相互作用的哈密顿量

$$\hat{H}_I = \hbar\left(\sum_j \omega'_j \hat{\Phi}_j^+ \hat{\Phi}_j + \chi_a \sum_j \hat{\Phi}_j^{+2} \hat{\Phi}_j^2\right. \tag{6.93a}$$

2. 量子孤子包络的准经典方程

为引出包络孤子的准经典方程,可将密度算符在相干态(即准经典态)中展开，作为孤子包络中相干态，定义为

$$\hat{\Phi}|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \mathrm{e}^{\varphi\hat{\Phi}^+ - \varphi^*\hat{\Phi}}|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\varphi|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n}{\sqrt{n!}}(\hat{\Phi}^+)^n|0\rangle \tag{6.94}$$

引入 P 表示，密度矩阵 $\hat{\rho}_I$ 与 P 表示关系为

$$\hat{\rho}_I = \int \mathrm{d}^2\vec{\varphi}\, P(\vec{\varphi})\, |\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}| \tag{6.95}$$

$$\vec{\varphi} = \varphi_{-N}\varphi_{-N}^* \cdots \varphi_N \varphi_N^*$$

代入主方程，利用关系

$$\Phi_j^{+}|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}| = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_j} + \varphi_j^*\right)|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|$$

$$\Phi_j^{+}\Phi_j|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}| = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_j} + \varphi_j^*\right)\varphi_j|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}| \tag{6.96}$$

可得到 P 表示所满足的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{\varphi}) = \mathrm{i}\sum_j\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_j}(\varphi_j\omega'_j - 2\chi_a\varphi_j^2\varphi_j^*) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_j^2}\chi_a\varphi_j^2\right]P(\vec{\varphi}) + c.c. \tag{6.97}$$

方程右边的第一项为位移项，第二项为扩散项。从随机过程理论给出方程（6.97）等价于以下的随机微分方程：

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} = \mathrm{i}(2\chi_a\varphi_j^2\varphi_j^* - \omega'_j\varphi_j)$$

由于

$$\varphi_j = \int \mathrm{d}x\Phi(x,t)\varphi_j(x)$$

取
$$\varphi_j(x) = \varphi_0\exp(\mathrm{i}j\Delta kx)$$

考虑到
$$\omega'_j = j\Delta k\frac{\partial\omega}{\partial k} + \frac{1}{2}(j\Delta k)^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)$$

得到包络孤子满足的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi(x,t) + 2\mathrm{i}\chi'_a n\Phi^2(x,t)\Phi^*(x,t) \tag{6.98}$$

其中 $\chi'_a = \frac{\varepsilon_0}{16\varepsilon^2}\hbar\omega^2\chi^{(3)}$，方程(6.98)式即为量子包络孤子满足的准经典的非线性薛定谔方程，注意它是写在静止参照系中的。目前流行经典的非线性薛定谔方程都习惯写在以群速度 $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ 运动的参照系中。下面将（6.98）式做些变换，在运动参照系中时间 $t' = t - x/v_g$，在这参照系中空间变数 x 变化是很小的，因此可以忽略 x 的二次导数，得

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Phi(x,t') - \frac{i\omega''}{2\omega'^3}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Phi(x,t') + 2i\frac{\chi'_a}{\omega'}n\Phi^2(x,t')\Phi^*(x,t')$$

(6.99)

其中 $\omega' = \frac{\partial\omega}{\partial k}$，$\omega'' = \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$。该形式与经典的非线性薛定谔方程相似，不同的是引入光子数 n，将方程进行标准化处理，令

$$z = \frac{\omega''}{\omega'^3}\chi t_0^{\ 2} \qquad \tau = t' t_0^{-1} \qquad u = \sqrt{2\frac{\omega'^2\ \langle n\rangle}{\omega''}}\chi'_a t_0\Phi$$

得

$$i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{n}{\langle n\rangle}|u|^2 u = 0 \qquad (6.100)$$

其中 $\langle n\rangle$ 为孤子包络中的平均光子数。

3. 量子准经典非线性薛定谔方程的应用

辐射场与物质相互作用中出现的一种量子效应是崩坍与再生现象，激光材料原子反转数的崩坍与再生现象已由实验所观测，在光纤中传输的孤子也可能出现量子崩坍与再生现象，这效应的存在可能对孤子的产生和稳定传输带来一定的影响。

作为量子准经典非线性薛定谔方程的应用实例，下面讨论孤子传输中的崩坍与再生效应。

方程（6.100）式可以用反散射法求解，一阶与二阶孤子解为

$$u_n^{\rm I}(\tau,z) = \mathrm{sech}\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau\,\exp\left(\frac{in}{2\langle n\rangle}z\right) \qquad (6.101)$$

$$u_n^{\rm II}(\tau,z) = 4\exp\left(\frac{in}{2\langle n\rangle}z\right)$$

$$\cdot\frac{\left[\mathrm{ch}3\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau + 3\exp\left(-4i\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}z\right)\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau\right]}{\left[\mathrm{ch}\left(4\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau\right) + 4\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau\right) + 3\cos4\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}z\right]}$$

从二阶孤子解可以看出孤子周期为

$$T_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\langle n\rangle} \tag{6.102}$$

这也是高阶孤子周期，设一阶孤子包络具有光子数为 n 的几率为 P_n，则平均包络函数为

$$\langle u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n u_n(\tau, z)$$

这里省去上标 I，取正交相振幅

$$x_1 = u + u^* \qquad x_2 = (u - u^*)/\mathrm{i}$$

x_1 的平均为

$$\langle x_1\rangle = 2\sum_{n=0}^{\infty} P_n \mathrm{Re}[u_n(\tau, z)]$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} P_n \mathrm{sech}\sqrt{\frac{n}{\langle n\rangle}}\tau \cos\frac{n}{2\langle n\rangle}z$$

在 $\tau = 0$ 处有

$$\langle x_1(0, z)\rangle = 2\sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\frac{n}{2\langle n\rangle}z$$

则给出再生周期为

$$T_R = 2\langle n\rangle\pi$$

为给出第一次崩坍的时间，近似取 P_n 为高斯分布，用积分代替求和有

$$\langle x(0, z)\rangle = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\langle n\rangle}}\exp[-(n-\langle n\rangle)^2/2\langle n\rangle] \cdot \cos\frac{n}{2\langle n\rangle}z\,\mathrm{d}n$$

$$= \exp\left(-\frac{z^2}{8\langle n\rangle}\right)$$

$$= \exp[-z^2/T_c^2]$$

得到崩坍时间

$$T_c = \sqrt{8\langle n\rangle}$$

与孤子周期比较，给出

$$T_R = 4\sqrt{\langle n\rangle}T_0 \qquad T_C = \frac{4}{\pi}\sqrt{2}T_0 \tag{6.103}$$

下面计算一个具体实例，前面T_0是用无量纲数表示的，实际数据是用传输距离表示的。孤子周期为

$$Z_0 = \frac{\pi}{2}\frac{2\pi c}{D\lambda^2}t_0^2 \tag{6.104}$$

其中D为色散参数，λ为入纤波长，t_0为孤子的宽度。

平均光子数可通过临界功率P_0来计算

$$\langle n\rangle = P_0 t_0/2\hbar\omega, \tag{6.105}$$

利用近期实验数据：$\lambda=1.55\mu m$，$D=1ps/km\cdot nm$，$t_0=12ps$，$P_0=4mW$，可以算出

$$Z_0=177km \qquad \langle n\rangle=1.88\times10^5$$

用长度表示再生周期

$$Z_R=4\sqrt{\langle n\rangle}Z_0=3.07\times10^5\ km$$

第一次崩坍的长度为

$$Z_C=\frac{4}{\pi}\sqrt{2}Z_0=319\ km$$

这结果表明，在当前进行的孤子实验中，第一次再生现象还不能观测到，但可以观测到崩坍现象。至于崩坍现象是否存在，可以通过入纤孤子中的光子数与入纤位相的依赖关系来检验。

§6-5 光孤子压缩态

在上一章已指出，常规光通信中是利用激光来传输信号，它是相干光，它的噪声极限为真空涨落，要克服由真空涨落对提高

信噪比带来的限制，只有采用压缩光场。

光孤子在光纤中形成和传输是利用光纤的色散效应和非线性效应的平衡，显示在时间和空间上的压缩性，那么光孤子是否为压缩态，它具有多大的压缩比是一个值得研究的课题。由于在光纤中光孤子利用非线性克服光纤色散效应，使它可以实现高容量长距离的传输，如果还能证明光孤子是在压缩态，而且是一个稳定压缩态的话，那么光孤子通信不仅可以实现超大容量与长距离传输，而且还可实现低噪声通信。这样光孤子通信将具有更大吸引力。下面介绍光孤子压缩态形成的原理及实验。

1. 压缩态产生的原理

早在 1985 年，当人们利用四波混频观测到光学压缩态后，就有人开始观测光脉冲在光纤中的压缩效应。从理论上讲这想法是很自然的。由于光纤中存在 Kerr 效应，它是三阶非线性效应，当一个泵浦光入射以后，其频率为 ω_P，由于三阶非线性作用可以产生 $\omega_P \pm \Omega$ 的两个边模，它们伴随 ω_P 向前传播，由于四波混频可以产生复共轭波，导致边模的压缩，而使噪声水平低于真空涨落。

取泵浦波频率为 ω_P，边模频率 $\omega_P \pm \Omega$. 泵浦波的振幅为 E_P，边模及与泵浦场作用的哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_S = & \hbar[(\omega_P + \Omega)\hat{a}_+^+ \hat{a}_+ + (\omega_P - \Omega)\hat{a}_-^+ \hat{a}_-] \\ & + \hbar\chi[4|E_P|^2(\hat{a}_+^+ \hat{a}_+ + \hat{a}_-^+ \hat{a}_-) + 2E_P^2\hat{a}_+^+ \hat{a}^+ - 2E_P^{*2}\hat{a}_+ \hat{a}_-]\end{aligned} \tag{6.106}$$

前两项为边模自由振动能量，中间两项为泵浦场与边模作用，后两项反映压缩作用，这里对泵浦场采用经典处理，变化满足方程

$$\frac{\partial E_P}{\partial t} = 2i\chi|E_P|^2 E_P \tag{6.107}$$

做一个么正变换使 $\mathscr{H}_S$ 去掉自由项，取么正算符

$$U = \exp\{-i[\omega_P + \Omega + 2\hbar\chi|E_P|^2]\hat{a}_+^+ a_+$$

$$+ (\omega - \Omega + 2\hbar\chi|E_P|^2)\hat{a}_-^+ \hat{a}_-]t\} \qquad (6.108)$$

在转动参照系中

算符 $\qquad \hat{a}'_\pm = U^+(t)\hat{a}_+ U(t)$

算符 $\qquad \hat{x}''_A = U^+(t)(\hat{a}_+ \hat{a}_-^+)U(t)$

$$\hat{x}'_\varphi = -\mathrm{i}U^+_{(t)}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-^+)U(t)$$

则方程（6.106）式成为

$$\mathscr{H}' = 2\hbar\chi|E_P|^2\hat{x}'_A\hat{x}'_A \qquad (6.109)$$

即相互作用只与振幅正交分量有关，而与位相正交分量无关，位相正交分量由以下方程决定

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}'\varphi}{\mathrm{d}t} = 4\chi|E_P|^2\hat{x}'_A \qquad (6.110)$$

对介质的损耗，可以引入热库算符 Γ，它们与边模作用

$$\mathscr{H}_N = a_+\Gamma^+ + a_- a' + a_+^+\Gamma + a_-^+\Gamma \qquad (6.111)$$

在转动参照系中

$$\mathscr{H}'_N = \hat{x}'_A\Gamma'_A + \hat{x}'_\varphi\Gamma'_\varphi$$

其中

$$\Gamma'_A = (\Gamma + \Gamma^+)/2 \qquad \Gamma'_\varphi = \frac{-\mathrm{i}}{2}(\Gamma - \Gamma^+)$$

利用第四章热库理论方程，通过对热库变数求迹可以求出密度算符的主方程，利用复 P 表示可以得到 c 数的福克-普朗克方程，利用随机理论的 It_0 规则，可以给出相应于算符 c 数的微分方程．定义矢量

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_A \\ x'_\varphi \\ x'^*_A \\ x'^*_\varphi \end{pmatrix} \qquad (6.112)$$

它满足随机微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t} = -\overline{A}\vec{x}' + \overline{D}^{1/2}\Gamma(t) \qquad (6.113)$$

其中矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ -4KI_p & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & -4xI_p & K \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4xI_p \\ 0 & 0 & 4xI_p & 0 \\ 0 & 4xI_p & 0 & 0 \\ 4xI_p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma(t)$是 δ 相关涨落力

$$\langle \Gamma_i(t)P_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$$

取 $t=0$ 时，边模在真空态初始条件下解方程（6.113）式，给出正交项振幅平均值为

$$\langle x'_A(t)x'^*_A(t)\rangle = 1$$

$$\langle x'_\varphi(t)x'^*_\varphi(t)\rangle = 1 + \frac{\chi^2 I_P^2}{\kappa^2}(1 - e^{-2\kappa t} - 2\kappa t e^{-2\kappa t}) \tag{6.114}$$

其中 $I_P=|E_P(0)|^2$ 是初始泵浦光强，κ 为线性损失系数，χ 为三阶非线性系数。

2. 压缩谱探测

在上一章已指出对压缩光测量必须利用相干测量，要利用可变位相的本地光进行相干测量，对强本地光可采用经典处理，得观测光电流为

$$i(\Omega,\theta) \propto \eta|E_{L0}|\left[x'_\theta(l) + \left(\frac{1}{\eta}-1\right)^{1/2}x'_0\right] \tag{6.115}$$

η 是探测器的量子效率，x'_0 是真空态正交算符而

$$x'_\theta(l) = x'_A(l)\cos\theta + x'_\varphi(l)\sin\theta$$

θ 是本地光相对泵浦光的位相差，谱分析器测出噪声功率将正比于 $i(\Omega,\theta)$的绝对值平方。

谱分析器可直接测量相对噪声，取真空态噪声为1，相对噪声

$$V(\Omega,\theta)=\langle x'^{*}_{\theta}x'_{\theta}\rangle$$

利用（6.114）式得到

$$V(\Omega,\theta)$$
$$=1+\eta\left[\frac{2S^2}{L^2}(1-e^{-L}-Le^{-L})(1-\cos2\theta)+\frac{2S}{L}(1-e^{-L})\sin2\theta\right]$$
$$(6.116)$$

其中 $S=2\chi I_{p}t$ 为有效压缩参数，$L=2\kappa t$ 为光纤总损失，$t=nl/c$，l 为光纤长度，如果 V（Ω，θ）小于1就表明有压缩，其出现与 θ 角有关。下面讨论损失为零情况，即 $\kappa=0$，$L\to0$，这时

$$V(\Omega,\theta)=1+\eta[2S^2(1-\cos2\theta)+2S\sin2\theta] \quad (6.117)$$

最大压缩对应 θ 角，从 V 取极值得

$$\mathrm{tg}2\theta_{\min}=-\frac{1}{S},\qquad V(\Omega,\theta_{\min})\approx1-2\eta S$$

表明在某些 θ 角，将出现压缩。

3. 光纤中压缩光的观测

基于前面理论考虑，1985年IBM的Shelby等人，利用液氦中冷却的光纤，观测相干光在光纤中可能出现的压缩性，1991年他们又改进装置分别在液氮温度和室温下观测相干光在光纤中压缩，分别得到1.7dB和1.1dB的压缩效果。

图6.8给出麻省理工学院Bargmann等人利用光纤环干涉仪进行光脉冲压缩的实验装置示意图。他们观测到5±0.3dB的压缩。采用的激光器是锁模的Nd・YAG激光器，脉冲宽度为100ps，$\lambda=1.3\mu m$，频率 $f=100MHz$，光纤压缩环利用50m保偏光纤做成，BS1为90/10的束分离器，利用平衡零差探测器进行相

干检测。

另外IBM的Rosewbinch和Shelby利用锁模色心激光器，产生1.55μm、200fs的孤子脉冲，利用10m的保偏光纤，观测到30%的压缩。

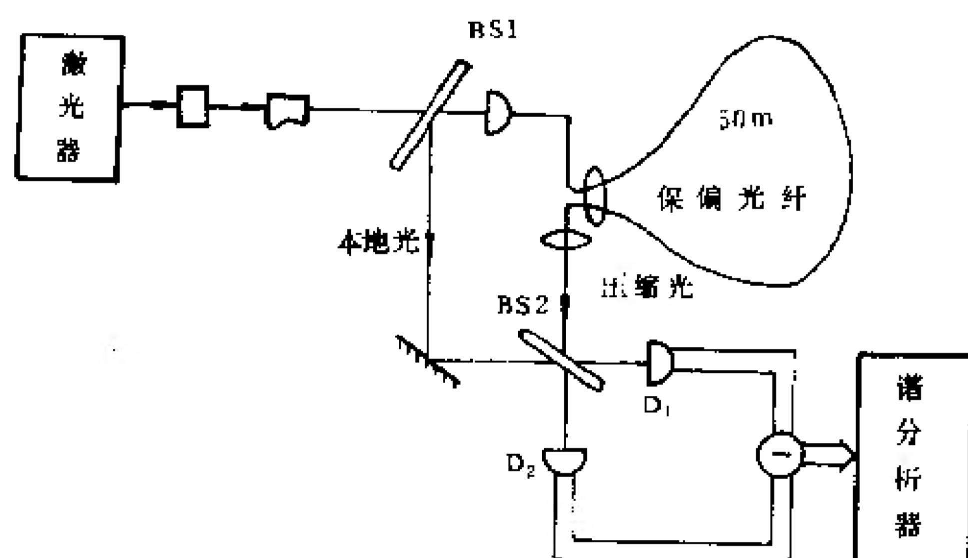


图6.8

习　题

6.1　试简单说明脉冲在光纤中可能形成光孤子的机理。

6.2　试验证非线性薛定谔方程

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+|u|^2u=0$$

具有以下形式的解

$$u(z,\tau)=\text{sech}\tau\exp\left(\frac{i}{2}z\right)$$

6.3　什么是光纤中光孤子传输的Gordon-Haus 效应?目前人们用什么方法突破 Gordon-Haus 限制?

6.4　试简单说明数值求解非线性薛定谔方程的分步富里叶变换法。

6.5　在孤子实验中取 $\lambda=1.55\mu m$, $D=1ps/km\cdot nm$，有效截面积 $A_{eff}=25\mu m$, $n_2=3.2\times10^{-20}m^2/W$，脉宽 $t_0=10ps$，试求孤子周期、一阶孤子的峰值功率和再生周期。

6.6　试用与时间有关的 Hartree 近似解量子非线性薛定谔方程。

参 考 文 献

〔1〕 A. Hazegawa. Optical Solitons in Fibers. 2nd, Springer Verlag, Berlin, 1990.

〔2〕 G. D. Agrawal. 非线性光纤光学. 天津大学出版社, 1992.

〔3〕 J. R. Taylor (ed). Optical Solitons-Theory and Experiment, Cambridge. NewYork, 1992.

〔4〕 A. Hazegawa, F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Appl. Phys. Lett., 23, No. 3, 142～144, 1973.

〔5〕 L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. Phys. Rev. Lett., 45 (13), 1095～1098, 1980.

〔6〕 J. P. Gordon, H. A. Haus. Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber. Opt. Lett., 11 (10), 665～667, 1986.

〔7〕 M. Nakazawa, et al.. Dynamic optical soliton communication. IEEE, J. Quan. Elec, 26 (2), 2095～2101, 1990.

〔8〕 H. Takara, S. Kawanishi, M. Sarawatari. 20 GHz transform limited optical pulse generation and bit error-free opiration using a tunable actively modelocked Er-doped fibre ring laser. Electron. Lett., 29 (13) 1149～1150, 1993.

〔9〕 M. Nakazawa et al.. 80 Gbit/s soliton data transmission over 500km with unequal amplitude solitons for timing clock extraction. Electron. Lett., 30(21) 1777～1778, 1994.

〔10〕 Ewan M. Wright. Quantum theory of soliton propagation in an optical fiber using the Hartree approximation. Phys.

Rev., A43 (7) 3836～3844. 1991.

〔11〕 Y. Lai, M. A. Haus. Quantum theory of solitions in optical fibers. I. time dependent Hartree approximation. Phys. Rev., A40 (2), 844～853, 1989.

〔12〕 I. M. Deutsch, J. C. Carrison. Paraxial quantum propagation. Phys. Rev., A43 (5), 2498～2513, 1991.

〔13〕 杨伯君, 乔本元. 光纤中量子孤子的准经典方程. 北京邮电大学学报, 17 (3) 56～62, 1994.

〔14〕 J. Satsuma, N. Yajima, Initial value problems of one dimensional self-modulartion of nonlinear waves in dispersive media. Suppl. prog. Theo. Phys., 55 284～306, 1974.

〔15〕 K. Bergman, H. A. Haus. Squeezing in fibers with optical pulses. opt. Lett., 16 663～665, 1991.